Nombres complexes - Chapitre 2

I. Définition, écriture algébrique, conjuqué

I.1. Introduction

Historiquement, le premier ensemble à avoir été étudié est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. À partir de cet ensemble, on a souhaité résoudre différents type d'équations.

- L'équation $x - 5 = 0$ par exemple admet bien une solution dans $\mathbb{N}$: $\mathcal{S} = \{5\}$.
- L'équation (simple) $x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{Z}$, contenant $\mathbb{N}$, des entiers relatifs. Dans cet ensemble $\mathbb{Z}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S} = \{-1\}$.
- L'équation (simple) $2x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{D}$, contenant $\mathbb{Z}$, des nombres décimaux. Dans cet ensemble $\mathbb{D}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S} = \{-0,5\}$.
- L'équation (simple) $3x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{D}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{Q}$, contenant $\mathbb{D}$, des nombres rationnels. Dans cet ensemble $\mathbb{Q}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{3}\}$.
- L'équation (simple) $x^2 = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$. On a donc construit l'ensemble $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$, des nombres réels. Dans cet ensemble $\mathbb{R}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}\}$.
- L'équation (simple) $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. On construit alors l'ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, des nombres complexes. Dans cet ensemble $\mathbb{C}$, l'équation précédente admet bien une solution : $\mathcal{S} = \{i\}$.

On s'intéresse dans ce chapitre à cet ensemble $\mathbb{C}$ de sa construction, aux propriétés qui lui sont spécifiques.

I.2. Premières définitions et propriétés

On introduit un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ muni d'une somme et d'un produit avec les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, on admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$, muni de deux lois internes $+$ et $\times$ et un élément i tel que $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$:

- × dont les lois $+$ et $\times$ prolongent celles de $\mathbb{R}$,
- × tel que tout élément de $\mathbb{C}$ puisse s'écrire :

$$z = x + (i \times y) \quad \text{avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple
Les nombres $1 + 2i$, $2 - 5i$, 7, $-i\,\pi$, $\ln(7) + ie$ sont des nombres complexes.

Définition (Écriture algébrique)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = a + ib$.

- × On appelle cette expression *écriture algébrique de z* (ou écriture cartésienne de z).
- × Le réel x est appelé *partie réelle de z* et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.
- × Le réel y est appelé *partie imaginaire de z* et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

Démonstration.
Démontrons l'unicité de l'écriture algébrique.
Soit $(x_1, x_2, y_1, z_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} z &= x_1 + iy_1 \\ z &= x_2 + iy_2 \end{cases}$$

- Alors tout d'abord :
$$x_1 - x_2 = i\,(y_2 - y_2)$$
$$\text{donc} \qquad (x_1 - x_2)^2 = -(y_2 - y_1)^2$$
On note : $X = x_1 - x_2 \in \mathbb{R}$ et $Y = y_2 - y_1 \in \mathbb{R}$. On obtient alors : $X^2 = -Y^2$.
- Démontrons : $Y = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde.
Supposons : $Y \neq 0$. Alors :
  - × d'une part : $\dfrac{Y}{X} \in \mathbb{R}$,
  - × d'autre part : $\left(\dfrac{X}{Y}\right)^2 = \dfrac{X^2}{Y^2} = -1$

  Absurde ! Car le carré d'un réel est toujours positif.
  On en déduit : $Y = 0$.
- Or : $X^2 = -Y^2$. Donc : $X = 0$. Ainsi :
$$x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2$$
L'écriture algébrique du nombre complexe z est donc unique.

□

Commentaire

- Comme l'écriture algébrique de z est unique, on peut parler de **l'**écriture algébrique d'un complexe, de **la** partie réelle, de **la** partie imaginaire.
- Comme l'écriture algébrique est unique, on a en particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$z = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\,(z) = 0 \text{ ET } \mathrm{Im}\,(z) = 0$$

Exemple

- Si $z = 4 + 3i$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = 4$ et $\mathrm{Im}\,(z) = 3$.
- Si $z = -5i + 17$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = 17$ et $\mathrm{Im}\,(z) = -5$.
- Si $z = \sqrt{2}$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = 0$.
- Si $z = -i\,\dfrac{2}{5}$, alors : $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{2}{5}$.

Proposition 1.

- *L'application* $\Phi \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array}$ *est une bijection.*
- *On appelle* imaginaire pur *tout nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.*
On note $i\,\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des imaginaires purs.
- *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :*
  (1) $\mathrm{Re}\,(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in i\,\mathbb{R}$
  (2) $\mathrm{Im}\,(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$

Proposition 2.
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine (avec des points) euclidien (muni de mesure de distances et d'angles) orienté muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
On peut identifier $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$.

Démonstration.
On note :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{C} & \to & \mathcal{P} \\ & & z & \mapsto & O + \mathrm{Re}\,(z)\ \vec{i} + \mathrm{Im}\,(z)\ \vec{j} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \psi & : & \mathcal{P} & \to & \mathbb{C} \\ & & m = (a,b) & \mapsto & a + ib \end{array}$$

Les applications φ et ψ sont bijectives et : $\varphi = \psi^{-1}$. □

Proposition 3. (Propriétés de + et $\times$)
Soient $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$.

1) *Associativité de + :*

$$(z_1 + z_2) + z_3 \ = \ z_1 + (z_2 + z_3) \ = \ z_1 + z_2 + z_3$$

2) *Commutativité de + :*

$$z_1 + z_2 \ = \ z_2 + z_1$$

3) *Élement neutre pour + : 0 est l'élément neutre pour la loi +.*

$$0 + z \ = \ z + 0 \ = \ z$$

4) *Opposé pour + : tout $z \in \mathbb{C}$ admet un opposé pour la loi +, noté $-z$.*

$$z + (-z) \ = \ (-z) + z \ = \ 0$$

5) *Associativité de $\times$:*

$$(z_1 \times z_2) \times z_3 \ = \ z_1 \times (z_2 \times z_3) \ = \ z_1 \times z_2 \times z_3$$

6) *Commutativité de $\times$:*

$$z_1 \times z_2 \ = \ z_2 \times z_1$$

7) *Élement neutre pour $\times$: 1 est l'élément neutre pour la loi $\times$.*

$$1 \times z \ = \ z \times 1 \ = \ z$$

8) *Inverse pour $\times$: tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet un inverse pour la loi $\times$, noté $\frac{1}{z}$.*

$$z \times \frac{1}{z} \ = \ \frac{1}{z} \times z \ = \ 1$$

9) *Distributivité de $\times$ sur + :*

$$z_1 \times (z_2 + z_3) \ = \ z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3 \qquad \textit{et} \qquad (z_1 + z_2) \times z_3 \ = \ z_1 \times z_3 + z_2 \times z_3$$

10) *Intégrité :*

$$(z_1 \times z_2 = 0) \ \Leftrightarrow \ (z_1 = 0 \ \texttt{OU} \ z_2 = 0)$$

Commentaire

Pour la culture :

- un ensemble muni de deux lois internes + et $\times$ vérifiant les propriétés ***1)***, ***2)***, ***3)***, ***4)***, ***5)***, ***7)***, ***9)*** est appelé *anneau (unitaire)*.
- si cet ensemble vérifie en plus ***6)***, alors l'anneau est dit *commutatif*.
- si, en plus de tout cela, l'ensemble vérifie la propriété ***8)*** (*i.e.* l'ensemble vérifie les propriétés ***1)*** à ***9)***), alors cet ensemble est appelé un *corps*.
- enfin, un ensemble vérifiant toutes les propriétés de ***1)*** à ***10)*** est appelé un corps *intègre*.

Exemple
Mettre les nombres suivants sous forme algébrique.

1) i^3 *2)* $3+2i-(3i-2)$ *3)* $(3-2i)(2+3i)$

Démonstration.

1) Tout d'abord :
$$i^3 \;=\; i^2 \times i \;=\; (-1) \times i \;=\; -i$$
On remarque : $\mathrm{Re}\left(i^3\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(i^3\right) = -1$.

2) Ensuite :
$$3+2i-(3i-2) \;=\; 3+2i-3i+2 \;=\; 5-i$$
On remarque : $\mathrm{Re}(3+2i-(3i-2)) = 5$ et $\mathrm{Im}(3+2i-(3i-2)) = -1$.

3) Enfin :
$$(3-2i)(2+3i) \;=\; 6+9i-4i-6i^2 \;=\; 6+5i+6 \;=\; 12+5i$$
On remarque : $\mathrm{Re}((3-2i)(2+3i)) = 12$ et $\mathrm{Im}((3-2i)(2+3i)) = 5$.

□

Exercice 1 *Résolution d'équations de degré* 1 *dans* $\mathbb{C}$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) : $3\,z+5i = 4i\,z+2$. On mettra la solution (s'il y en a) sous forme algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $(z+2)(3+i) = -i\,z+6$. On mettra la solution (s'il y en a) sous forme algébrique.

Démonstration.

1) On peut choisir parmi deux méthodes.

- Méthode 1 :

  a) on résout l'équation « comme dans $\mathbb{R}$ » en isolant l'inconnue z,

  b) on écrit le résultat obtenu sous forme algébrique.

  Appliquons cette méthode.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.

  a) Tout d'abord :
  $$3\,z+5i = 4i\,z+2 \;\Leftrightarrow\; 3\,z-4i\,z = 2-5i \;\Leftrightarrow\; (3-4i)\,z = 2-5i \;\Leftrightarrow\; z = \frac{2-5i}{3-4i}$$
  On en déduit que l'équation (E_1) admet une unique solution : $z_0 = \dfrac{2-5i}{3-4i}$.

  b) De plus :
  $$z_0 \;=\; \frac{2-5i}{3-4i} \;=\; \frac{(2-5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \;=\; \frac{6+8i-15i-20\,i^2}{9-(4i)^2} \;=\; \frac{6-7i+20}{9+16} \;=\; \frac{26}{25}-\frac{7}{25}\,i$$
  Finalement : $\mathcal{S}_{(E_1)} = \{\frac{26}{25}-\frac{7}{25}\,i\}$.

- Méthode 2 :

  a) on comme par écrire z sous forme alébrique : $z = x+iy$. On obtient ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues (x et y) en identifiants parties réelles et imaginaires,

  b) on résout ce système.

Appliquons cette méthode.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.
a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} 3\,z + 5i = 4i\,z + 2 \;&\Leftrightarrow\; 3\,(x+iy) + 5i = 4i\,(x+iy) + 2 \\ &\Leftrightarrow\; 3x + 3iy + 5i = 4ix - 4y + 2 \\ &\Leftrightarrow\; (3x+4y) + i(-4x+3y) = 2 - 5i \\ &\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\,x & + & 4\,y & = & 2 \\ -4\,x & + & 3\,y & = & -5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(par unicité de l'écriture sous forme algébrique)

b) On pousuit la résolution du système.

$$\begin{aligned} 3\,z + 5i = 4i\,z + 2 \;&\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\,x & + & 4\,y & = & 2 \\ -4\,x & + & 3\,y & = & -5 \end{array} \right. \\ &\overset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 + 4\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\,x & + & 4\,y & = & 2 \\ & & 25\,y & = & -7 \end{array} \right. \\ &\overset{L_1 \leftarrow 25\,L_1 - 4\,L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcr} 75\,x & = & 78 \\ 25\,y & = & -7 \end{array} \right. \\ &\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{75}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{25}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{78}{75} = \dfrac{\cancel{3} \times 26}{\cancel{3} \times 25} = \dfrac{26}{25} \\ y = -\dfrac{7}{25} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Finalement, on retrouve bien (heureusement !) : $\mathcal{S}_{(E_1)} = \{\frac{26}{25} - \frac{7}{25}\,i\}$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

- <u>Méthode 1</u> :

  a) Tout d'abord :

$$(z+2)(3+i) = -i\,z + 6 \;\Leftrightarrow\; 3z + i\,z + \cancel{6} + 2i = -i\,z + \cancel{6} \;\Leftrightarrow\; (3+2i)\,z = -2i \;\Leftrightarrow\; z = -\frac{2i}{3+2i}$$

  On en déduit que l'équation (E_2) admet une unique solution : $z_0 = -\dfrac{2i}{3+2i}$.

  b) De plus :

$$z_0 = -\frac{2i}{3+2i} = -\frac{2i\,(3-2i)}{(3+2i)\,(3-2i)} = -\frac{6i+4}{9-(2i)^2} = -\frac{4}{13} - \frac{6}{13}\,i$$

  Finalement : $\mathcal{S}_{(E_2)} = \{-\frac{4}{13} - \frac{6}{13}\,i\}$.

- <u>Méthode 2</u> :

  Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

  a) Tout d'abord :

$$\begin{aligned} & (z+2)(3+i) = -i\,z + 6 \\ \Leftrightarrow\; & (x+iy+2)(3+i) = -i\,(x+iy) + 6 \\ \Leftrightarrow\; & 3x + ix + 3iy - y + \cancel{6} + 2i = -ix + y + \cancel{6} \\ \Leftrightarrow\; & (3x-2y) + i(2x+3y) = -2i \\ \Leftrightarrow\; & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ 2\,x & + & 3\,y & = & -2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

  (par unicité de l'écriture sous forme algébrique)

b) On pousuit la résolution du système.

$$
\begin{array}{rcl}
(z+2)(3+i) = -i\,z+6 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ 2\,x & + & 3\,y & = & -2 \end{array}\right. \\[2ex]
& \underset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\,x & - & 2\,y & = & 0 \\ & & 13\,y & = & -6 \end{array}\right. \\[2ex]
& \underset{L_1 \leftarrow 13\,L_1 + 2\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 39\,x & & & = & -12 \\ & & 13\,y & = & -6 \end{array}\right. \\[2ex]
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{39}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{13}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{12}{39} = -\dfrac{\cancel{3}\times 4}{\cancel{3}\times 13} = -\dfrac{4}{13} \\[2ex] y = -\dfrac{6}{13} \end{array}\right.
\end{array}
$$

Finalement, on retrouve bien : $\mathcal{S}_{(E_2)} = \{-\frac{4}{13} - \frac{6}{13}\,i\}$.

$\square$

Pour la résolution de systèmes, on privilégiera **toujours** l'utilisation de l'algorithme du pivot de Gauss à la substitution pour diminuer drastiquement le risque d'erreurs de calculs.

I.3. Conjugué d'un nombre complexe

Définition (Conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $z = x + iy$.

On appelle *conjugué de* z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe :

$$\bar{z} \;=\; x - iy$$

Proposition 4.

Soit $z \in \mathbb{C}$*. Alors :*

1) $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ ***2)*** $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ ***3)*** $z\,\bar{z} = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $z = x + iy$.

1) On remarque :

$$z + \bar{z} \;=\; (x + \cancel{iy}) + (x - \cancel{iy}) \;=\; 2x \;=\; 2\;\mathrm{Re}\,(z)$$

D'où : $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$.

2) De même :

$$z - \bar{z} \;=\; (\cancel{x} + iy) - (\cancel{x} - iy) \;=\; 2iy \;=\; 2i\;\mathrm{Im}\,(z)$$

D'où : $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

3) Enfin :

$$z\,\bar{z} \;=\; (x+iy)\,(x-iy) \;=\; x^2 - (iy)^2 \;=\; x^2 + y^2$$

D'où : $z\,\bar{z} = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2$.

$\square$

Proposition 5. (Propriétés de la conjugaison)

1) *Caractère involutif* : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{(\overline{z})} = z$.

2) *Linéarité* : $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2} = \lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2}$.

3) *Compatibilité avec le produit* : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

4) *Compatibilité avec l'inverse* : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

5) *Compatibilité avec le quotient* : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $z = x + iy$. Alors :

$$\overline{(\overline{z})} \;=\; \overline{(\overline{x+iy})} \;=\; \overline{x - iy} \;=\; \overline{x + i(-y)} \;=\; x - i(-y) \;=\; x + iy \;=\; z$$

2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

- D'une part :

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \;=\; \lambda_1 (x_1 + iy_1) + \lambda_2 (x_2 + iy_2) \;=\; (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + i (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

  Ainsi :

$$\overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2} \;=\; (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - i (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

- D'autre part :

$$\lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2} \;=\; \lambda_1 (x_1 - iy_1) + \lambda_2 (x_2 - iy_2) \;=\; (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - i (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$$

Finalement, on a bien :

$$\overline{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2} = \lambda_1 \overline{z_1} + \lambda_2 \overline{z_2}$$

3) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

- D'une part :

$$z_1 \times z_2 \;=\; (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \;=\; x_1 x_2 + i x_1 y_1 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \;=\; (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

  Ainsi :

$$\overline{z_1 \times z_2} \;=\; (x_1 x_2) - i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

- D'autre part :

$$\overline{z_1} \times \overline{z_2} \;=\; (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \;=\; x_1 x_2 - i x_1 y_2 - i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \;=\; (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i (x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Finalement, on a bien :

$$\overline{z_1 \times z_2} \;=\; \overline{z_1} \times \overline{z_2}$$

(on démontre le cas particulier par récurrence sur n)

4) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que : $z = x + iy$.

- On commence par écrire $\dfrac{1}{z}$ sous forme algébrique :

$$\frac{1}{z} \;=\; \frac{1}{x + iy} \;=\; \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} \;=\; \frac{x - iy}{x^2 - (iy)^2} \;=\; \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \;=\; \frac{x}{x^2 + y^2} - i \,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

  On en déduit :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \;=\; \frac{x}{x^2 + y^2} + i \,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

- Par ailleurs :

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x-iy)\,(x+iy)} = \frac{x+iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

Finalement, on a bien :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

5) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right)} \\
&= \overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} && \textit{(par compatibilité de la conjugaison avec le produit)} \\
&= \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}} && \textit{(par compatibilité de la conjugaison avec l'inverse)} \\
&= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}
\end{aligned}$$

□

Commentaire

- Rappelons la définition de bijectivité.
  Une fonction $f : E \to F$ est dite bijective s'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que :

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_E$$

- Le caractère involutif de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$ permet donc d'en déduire sa bijectivité.
  Démontrons le.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(f \circ f)(z) = f\big(f(z)\big) = f\,(\bar{z}) = \overline{(\bar{z})} = z$$

  Comme cette égalité est vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en déduit :

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$$

  On en conclut que f est bijective, de réciproque elle-même ($f^{-1} = f$).
- On appelle aussi les fonctions involutives (les fonctions f vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_E$) des symétries. Nous reviendrons plus en détails sur ce point dans le chapitre suivant mais rappelons nous que l'ensemble $\mathbb{C}$ est en bijection avec le plan $\mathbb{R}^2$ (on parle d'ailleurs de *plan complexe*). Dans ce contexte, nous verrons que la conjugaison est effectivement une symétrie : la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 2
Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $\dfrac{1}{i}$ ***b)*** $\dfrac{1}{1+2i}$ ***c)*** $\dfrac{1+i}{2i-3}$

Démonstration.

1) Tout d'abord :

$$\frac{1}{i} \;=\; \frac{i}{i \times i} \;=\; \frac{i}{-1} \;=\; -i$$

On remarque : $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\right) = 0$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i}\right) = -1$.

2) Ensuite :

$$\frac{1}{1+2i} \;=\; \frac{1-2i}{(1+2i)\,(1-2i)} \;=\; \frac{1-2i}{1-(2i)^2} \;=\; \frac{1-2i}{1+4} \;=\; \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,i$$

On remarque : $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+2i}\right) = \frac{1}{5}$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+2i}\right) = -\frac{2}{5}$.

3) Enfin :

$$\frac{1+i}{2i-3} \;=\; \frac{(1+i)\,(-3-2i)}{(-3+2i)\,(-3-2i)} \;=\; \frac{-3-2i-3i+2}{(-3)^2-(2i)^2} \;=\; \frac{-1-5i}{13} \;=\; -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\,i$$

On remarque : $\mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{2i-3}\right) = -\frac{1}{13}$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1+i}{2i-3}\right) = -\frac{5}{13}$.

□

Commentaire

À l'aide de la proposition précédente, on peut démontrer par récurrence les résultats suivants :

a) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

$$\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

b) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

$$\overline{\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right)} \;=\; \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

Proposition 6.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes.

1) $z = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$

2) $z = -\bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \in i\,\mathbb{R}$

Démonstration.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

$$z = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; \cancel{x} + iy = \cancel{x} - iy \;\Leftrightarrow\; 2iy = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}\,(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

$$z = -\bar{z} \;\Leftrightarrow\; x + iy = -(x - iy) \;\Leftrightarrow\; x + \cancel{iy} = -x + \cancel{iy} \;\Leftrightarrow\; 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\,(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in i\,\mathbb{R}$$

□

Exercice 3

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$a\bar{a} = 1, \qquad b\bar{b} = 1, \qquad a \neq b$$

Démontrer : $\dfrac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration.
On note : $z = \dfrac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b}$.

- Tout d'abord :

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = -\bar{z}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\bar{z} \;&=\; \overline{\frac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b}} \;=\; \frac{\overline{c + ab\bar{c} - a - b}}{\overline{a - b}} \;=\; \frac{\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{\bar{c}} - \bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} \\
&=\; \frac{\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c - \bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} \;=\; \frac{\bar{c} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \;=\; \frac{ab\bar{c} + c - b - a}{b - a} \\
&=\; -\frac{c + ab\bar{c} - a - b}{a - b} \;=\; -z
\end{aligned}$$

On en déduit : $z \in i\mathbb{R}$. $\square$

Exercice 4 *Résolution d'équations*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(E_1) : 2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ ***b)*** $(E_2) : 2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$ ***c)*** $(E_3) : 3z + 7 = 4 - 3\bar{z}$

Démonstration.
a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
2z + i\bar{z} = 5 - 2i \quad &\Leftrightarrow \quad 2(x + iy) + i(x - iy) = 5 - 2i \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2iy + ix + y = 5 - 2i \\
&\Leftrightarrow \quad (2x + y) + i(x + 2y) = 5 - 2i \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5 \\ x & + & 2y & = & -2 \end{array} \right. \\
&\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5 \\ & & 3y & = & -9 \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 6x & & & = & 24 \\ & + & 3y & = & -9 \end{array} \right. \\
&\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & \dfrac{24}{6} = 4 \\ & + & y & = & -\dfrac{9}{3} = -3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\mathcal{S}_{(E_1)} = \{4 - 3i\}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z} \;\Leftrightarrow\; 1 - 3i = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; 1 + 3i = z$$

On en déduit : $\mathcal{S}_{(E_2)} = \{1 + 3i\}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$3z + 7 = 4 - 3\bar{z} \;\Leftrightarrow\; 3(z + \bar{z}) = -3 \;\Leftrightarrow\; z + \bar{z} = -1 \;\Leftrightarrow\; 2\,\mathrm{Re}\,(z) = -1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\,(z) = -\frac{1}{2}$$

On en déduit : $\mathcal{S}_{(E_3)} = \{-\frac{1}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$. $\square$

I.4. Formule du binôme de Newton

I.4.a) Factorielle et combinaisons

Définition (Factorielle)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *factorielle de* n et on note $n!$ l'entier :

$$n! \ = \ \prod_{k=1}^{n} k \ = \ n \times (n-1) \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

On a de plus la convention : $0! = 1$.

Définition (p-combinaison)
Soit E un ensemble fini.

- On appelle p-**combinaison** d'élémts de E toute partie à p éléments de E.
- On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble E possédant n éléments *i.e.* le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
- $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(p-1))}{p!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$

(le symbole $\binom{n}{p}$ *est lu « p parmi n »)*

Démonstration.
Considérons une partie à p éléments de E.
Ordonner ces éléments correspond à se donner un p-arrangement de ceux-ci.
Or, il y a $p!$ p-arrangements d'un ensemble à p éléments (on a p possibilités pour le 1^{er} arrangement choisi, $(p-1)$ pour le $2^{\text{ème}}$, …, 2 possibilités pour le $(p-1)^{\text{ème}}$ et 1 possibilité pour le $p^{\text{ème}}$).
Ainsi, chaque p-combinaison d'éléments de E donne lieu à $p!$ p-arrangements différents. Autrement dit, il y $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. On en conclut que :

$$p! \times \binom{n}{p} \ = \ A_n^p \ = \ \frac{n!}{(n-p)!}$$

En effet pour choisir p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n possibilités pour le 1^{er} élément choisi, $(n-1)$ pour le $2^{\text{ème}}$, …, $n-(p-2)$ possibilités pour le $(p-1)^{\text{ème}}$ et $n-(p-1)$ possibilité pour le $p^{\text{ème}}$. □

Exemple classique : tirage `SIMULTANÉ` (`SANS` remise) de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
(sans ordre et sans répétition)

Exemple
On considère l'urne à 9 boules précédente et on procède au tirage simultané de 3 boules de l'urne. Les éléments suivants sont des 3-combinaisons d'éléments de $[\![1, 9]\!]$.

$$\{1,3,8\} \quad \{2,7,5\} \quad \{4,1,2\} \quad \{1,2,3\} \quad \{4,5,6\} \quad \{1,7,9\} \quad \{2,7,8\}\dots$$

⚠ Il n'y a pas d'ordre associé à ce tirage : les boules sont tirées en même temps. Notez que les ensembles $\{2,7,5\}$ et $\{2,5,7\}$ sont égaux.
(deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments)

Combien y a-t-il de tirages en tout ?
Une 3-combinaison peut-être vue comme un 3-arrangement dans lequel l'ordre ne serait pas pris en compte. Comparons le nombre de 3-arrangements au nombre de 3-combinaisons. Si l'on dispose d'une 3-combinaison $\{1, 3, 8\}$, on peut produire à l'aide de ses éléments, les 3-arrangements suivants :

$$(1, 3, 8) \quad (1, 8, 3) \quad (3, 1, 8) \quad (3, 8, 1) \quad (8, 1, 3) \quad (8, 3, 1)$$

On a ainsi produit six 3-arrangements différents. Chacun de ces 3-arrangements correspond à une manière d'ordonner les éléments 1, 3, 8. Autrement dit, on considère toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 3, 8\}$. Il y en a $3! = 6$.
Au final, à chaque 3-combinaison correspond $3!$ (*i.e.* six) 3-arrangements. Il y a donc $3!$ fois moins de 3-combinaisons que de 3-arrangements :

$$\binom{9}{3} = \frac{A_9^3}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

De manière générale, si l'urne contient n boules et qu'on effectue le tirage `SIMULTANÉ` de p boules, il y a $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ tirages différents.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

a) $\boxed{\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

b) Si $k < 0$ ou si $k > n$, on convient que $\binom{n}{k} = 0$.

c) Quelques cas simples :

- $\binom{n}{0} = 1$: la seule partie à 0 élément d'un ensemble à n éléments est l'ensemble vide.
- $\binom{n}{n} = 1$: la seule partie à n éléments d'un ensemble E à n éléments est l'ensemble E.
- $\binom{n}{1} = n$: il y a n parties à un élément d'un ensemble E à n éléments (ce sont les singletons $\{x_i\}$).
- $\binom{n}{n-1} = n$: il y a n parties à $n-1$ éléments d'un ensemble E à n éléments (ce sont les ensembles $E \setminus \{x_i\}$).

d) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$

e) <u>Formule du triangle de Pascal</u> :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Cette formule s'écrit souvent sous la forme d'un triangle :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	...						

f) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}}$

g) Formule de Vandermonde :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall p \in [\![0, a+b]\!], \quad \boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k} \binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}}$$

Démonstration.

d) Il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments.
Notons P_k l'ensemble des parties à k éléments de E.
L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} P_k & \to & P_{n-k} \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ est une bijection.
Il y a donc autant de parties à k éléments de E que de parties à $n-k$ éléments de E (les complémentaires des précédents).

e) Ici aussi, il y a deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-\cancel{1})-(k-\cancel{1}))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,((n-1)-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-k)\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

En sommant ces deux éléments, on obtient :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(k+(n-k))\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

× Méthode théorique.
Soit E est un ensemble à n éléments. Soit $a \in E$. Notons alors P_k^a l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a et $P_k^{\bar{a}}$ l'ensemble des parties de E à k éléments contenant a ne contenant pas a.
Tout $A \in P_k$ vérifie : $(A \in P_k^a)$ OU $(A \in P_k^{\bar{a}})$.
Autrement dit : $P_k = P_k^a \ \cup \ P_k^{\bar{a}}$ (union disjointe).
On en déduit que : $\text{Card}(P_k) = \text{Card}(P_k^a) \ + \ \text{Card}(P_k^{\bar{a}})$.
On conclut en remarquant tout d'abord que : $\text{Card}(P_k) = \binom{n}{k}$
puis que : $\text{Card}(P_k^a) = \binom{n-1}{k-1} \left(\begin{array}{l} \text{on choisit } k-1 \text{ éléments} \\ \text{dans } E \setminus \{a\} \text{ et on ajoute } a \end{array} \right)$
et enfin : $\text{Card}(P_k^{\bar{a}}) = \binom{n-1}{k}$ (on choisit k éléments dans $E \setminus \{a\}$)

f) Encore deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k \binom{n}{k}$$

× Méthode théorique.
On s'intéresse au nombre de couples formés d'un ensemble $A \in P_k$ et d'un élément a pris dans A. Il y en a : $\text{Card}\, P_k \times \text{Card}\, A = \binom{n}{k} \times k$.
On aurait pu raisonner différement : choisir d'abord un élément $a \in E$ puis former l'ensemble A en choisissant $k-1$ éléments autres que a et en ajoutant a. Au final, on obtient : $\text{Card}\, E \times \text{Card}\, P_k^a = n \binom{n-1}{k-1}$

g) Encore et toujours deux méthodes pour démontrer cette égalité.

× Méthode calculatoire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de remarquer que : $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b$
et d'appliquer la formule du binôme (*cf* Théorème **??**).

× Méthode théorique.
Si E est un ensemble à $a+b$ éléments, on peut l'écrire comme union disjointe de F (à a éléments) et de G (à b éléments). Pour choisir une partie à p éléments de E on peut choisir une partie à k éléments de F et la compléter par une partie à $p-k$ éléments de G. Plus précisément, l'ensemble P_k est en bijection avec :

$$\bigcup_{k=0}^{p} (T_k \times R_{p-k})$$

où T_k est l'ensemble des parties à k éléments de F
et R_k est l'ensemble des parties à $p-k$ éléments de G.

□

I.4.b) Formule du binôme de Newton et variante

Proposition 7.
Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

1) *Binôme de Newton :* $(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

2) $u^n - v^n \ = \ (u-v) \sum\limits_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} \ = \ (u-v) \sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k\, v^{n-1-k}$.

Démonstration.

1) Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : (u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

- **Initialisation** :
  - $\times$ D'une part : $(u+v)^0 = 1$.
  - $\times$ D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \dbinom{0}{k} u^k\, v^{0-k} = \dbinom{0}{0} u^0\, v^0 = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \dbinom{n+1}{k} u^k\, v^{(n+1)-k}$).

$$
\begin{aligned}
& (u+v)^{n+1} \\
= \ & (u+v)\,(u+v)^n \\
= \ & (u+v) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \ & u \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1}\, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(toujours par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n}{k-1} u^k\, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \ & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right) + \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right) \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 && \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0 \\
= \ & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

2) Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

- Méthode 1 : manipulation du symbole $\sum$.

$$\begin{aligned}
& (u-v) \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} \\
= \ & u \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} - v \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} u^{k}\, v^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n+1-k} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} u^{k}\, v^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} u^{k-1}\, v^{n-(k-1)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} u^{k}\, v^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} u^{k}\, v^{n-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n-1} u^{k}\, v^{n-k}} + u^n\, v^{n-n} \right) - \left(u^0\, v^{n-0} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} u^{k}\, v^{n-k}} \right) \\
= \ & u^n - v^n
\end{aligned}$$

- Méthode 2 : récurrence.
  On laisse le soin au lecteur de rédiger cette $2^{\text{ème}}$ présentation. $\square$

Commentaire

On rencontrera la formule du binôme de Nexton sous différentes formes (différentes valeurs pour u et v). On a notamment :

- $(u+v)^n = (v+u)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$
- $(u-v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u^{n-k} v^k$
- $(1+u)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k$
- $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  Si E est un ensemble à n éléments, on a :
  $$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k \text{ (union disjointe) et donc } \operatorname{Card} E = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(P_k)$$
  On obtient ainsi une nouvelle démonstration de : $\operatorname{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
- $(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Exercice 5

Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} z^k$

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} z^k$

Commentaire

- On pourra retenir quatre cas particuliers de *2)*. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
  - × $u^2 - v^2 \; = \; (u - v)(u + v)$
  - × $u^2 + v^2 \; = \; (u - iv)(u + iv)$
  - × $u^3 - v^3 \; = \; (u - v)\left(u^2 + uv + v^2\right)$
  - × $u^3 + v^3 \; = \; (u + v)\left(u^2 - uv + v^2\right)$
- On retiendra aussi la propriété suivante.
  Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $q \geqslant p$.

$$\sum_{k=p}^{q} z^k \; = \; z^p \, \frac{z^{q-p+1} - 1}{z - 1}$$

En effet :

$$\sum_{k=p}^{q} z^k \; = \; z^p \sum_{k=0}^{q-p} z^k \; = \; z^p \, \frac{z^{q-p+1} - 1}{z - 1}$$

On n'hésitera pas à écrire la première égalité avec des points de suspension si on ne maîtrise pas encore l'utilisation du symbole $\sum$.

Si $z = 1$, la formule précédente n'est pas valide. Mais on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=p}^{q} 1^k \; = \; \sum_{k=p}^{q} 1 \; = \; q - p + 1$$

II. Équations polynomiales

MÉTHODO

Résoudre une équation se fait toujours en 3 étapes :

1) Déterminer le cadre de travail

2) Transformer l'équation par équivalence

3) Conclure

Exemple

a) Résoudre l'équation $2x^2 + 1 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

2) On a les équivalences suivantes :

$$2x^2 + 1 = 4 \; \Leftrightarrow \; 2x^2 = 3 \; \Leftrightarrow \; x^2 = \frac{3}{2} \; \Leftrightarrow \; x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ OU } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

3) L'ensemble des solutions de cet équation est donc $\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\}$.

□

b) Résoudre l'équation $2x^2 + 1 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{Q}$.

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{Q}$.

2) On a les équivalences suivantes :

$$2x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}} \texttt{ OU } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

3) L'ensemble des solutions de cet équation est donc $\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.

□

II.1. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition (Racine carrée)
Soit $Z \in \mathbb{C}$.
On dit que z est une *racine carrée de* Z si et seulement si : $z^2 = Z$.

⚠ On écrit les mots « racine carrée » mais on **<u>s'interdit</u>** la notation fonctionnelle $\cancel{\sqrt{z}}$ ou $\cancel{z^{\frac{1}{2}}}$.

Proposition 8.
Tout nombre complexe **non nul** *admet exactement* 2 *racines carrées opposées dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration.
Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que : $Z = A + iB$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

- D'une part :

$$\begin{aligned} z^2 = Z &\Leftrightarrow (x+iy)^2 = A + iB \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = A + iB \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 &=& A \\ 2xy &=& B \end{array} \right. \qquad \textit{(par unicité de l'écriture sous forme algébrique)} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Re}\left(z^2\right) &=& \mathrm{Re}\left(Z\right) \\ \mathrm{Im}\left(z^2\right) &=& \mathrm{Im}\left(Z\right) \\ |z^2| &=& |Z| \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 &=& A \\ 2xy &=& B \\ x^2 + y^2 &=& \sqrt{A^2 + B^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 &=& \dfrac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2} \\ y^2 &=& \dfrac{-A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2} \\ 2xy &=& B \end{array} \right.$$

(on a ici passé sous silence quelques étapes de calculs que l'on n'hésitera pas à détailler chez soi (en n'oubliant pas d'utiliser l'algorithme du pivot de Gauss !))

Deux cas se présentent alors :

- si $B \neq 0$, alors : $\sqrt{A^2+B^2} > |A|$. D'où : $A + \sqrt{A^2+B^2} > 0$ et $-A + \sqrt{A^2+B^2} > 0$.
  On en déduit que les racines carrées de Z sont telles que :

$$x = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} \quad \texttt{ET} \quad y = \text{sign}(B)\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

$$\texttt{OU}$$

$$x = -\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} \quad \texttt{ET} \quad y = -\text{sign}(B)\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

  Le complexe Z admet donc exactement 2 racines carrées :

$$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} + i\,\text{sign}(B)\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} \quad \texttt{ET} \quad -\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}} - i\,\text{sign}(B)\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}$$

  (on a encore une fois passé sous silence quelques étapes de calculs)

- si $B = 0$, deux nouveaux cas se présentent :
  × si $A < 0$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 0 \\ y^2 & = & \dfrac{|A|+\sqrt{A^2+0^2}}{2} = \dfrac{2\,|A|}{2} = |A| \\ 2xy & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \sqrt{|A|} \end{array}\right. \texttt{OU} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -\sqrt{|A|} \end{array}\right.$$

  Ainsi, le complexe Z admet exactement 2 racines carrées :

$$i\sqrt{|A|} \;\; \texttt{ET} \;\; -i\sqrt{|A|}$$

  × si $A > 0$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & \dfrac{|A|+\sqrt{A^2+0^2}}{2} = \dfrac{2\,|A|}{2} = |A| \\ y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{|A|} \\ y & = & 0 \end{array}\right. \texttt{OU} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\sqrt{|A|} \\ y & = & \end{array}\right.$$

  Ainsi, le complexe Z admet exactement 2 racines carrées :

$$\sqrt{|A|} \;\; \texttt{ET} \;\; -\sqrt{|A|}$$

□

Corollaire 1.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

1) *Si $a \in \,]0, +\infty[$, alors :*

$$(z^2 = a) \;\Leftrightarrow\; (z = \sqrt{a} \;\; \texttt{OU} \;\; z = -\sqrt{a})$$

2) *Si $a = 0$, alors :*

$$(z^2 = 0) \;\Leftrightarrow\; (z = 0)$$

3) *Si $a \in \,]-\infty, 0[$, alors :*

$$(z^2 = a) \;\Leftrightarrow\; (z = i\sqrt{a} \;\; \texttt{OU} \;\; z = -i\sqrt{a})$$

Exercice 6
Résoudre l'équation $z^2 = 1 + 3i$ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$
\begin{aligned}
z^2 = 1 + 3i \quad & \Leftrightarrow \quad (x + iy)^2 = 1 + 3i \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 + 2ixy - y^2 = 1 + 3i \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x^2 & - & y^2 & = & 1 \\ & & 2xy & = & 3 \\ x^2 & + & y^2 & = & |z|^2 = |z^2| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x^2 & - & y^2 & = & 1 \\ & & 2xy & = & 3 \\ & & 2\,y^2 & = & -1\sqrt{10} \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x^2 & = & 1 + \sqrt{10} \\ 2xy & = & 3 \\ 2\,y^2 & = & -1 + \sqrt{10} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & \dfrac{1+\sqrt{10}}{2} \\ 2xy & > & 3 \\ y^2 & = & \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Comme $xy > 0$, on en déduit :

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}} \quad \texttt{ET} \quad y = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}}$$

$$\texttt{OU}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}} \quad \texttt{ET} \quad y = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}}$$

L'équation admet exactement 2 solutions (*i.e.* $1 + 3i$ admet exactement 2 racines carrées) :

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}} + i\,\sqrt{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}} \qquad \texttt{ET} \qquad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{10}}{2}} - i\,\sqrt{\frac{-1+\sqrt{10}}{2}}$$

$\square$

II.2. Polynômes et équations polynomiales à coefficients réels

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition (Polynôme)

- On appelle *polynôme* à coefficient dans $\mathbb{K}$ toute expression de la forme :

$$P(X) \ = \ a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_2\, X^2 + a_1\, X + a_0$$

  où $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Les réels a_0, ..., a_n sont appelés les *coefficients de P*.
- Si tous les coefficients a_0, ..., a_n sont nules, P est appelé le *polynôme nul*. Il est noté $0_{\mathbb{R}[X]}$.
- On appelle *degré de P* le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$. On le note $\deg(P)$.
  Par convention : $\deg\left(0_{\mathbb{R}[X]}\right) = -\infty$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes de degré au plus n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.
- On appelle *coefficient dominant de P* le coefficient a_{i_0} où $i_0 = \deg(P)$.
  Si le coefficient dominant de P est égal à 1, on dit que P est un *polynôme unitaire.*
- Un polynôme de la forme $P(X) = a_0$, avec $a_0 \in \mathbb{K}$est appelé un *polynôme constant.*
- Les polynômes comportant un seul terme non nul (de la forme $a_k\, X^k$) sont appelés *monômes.*
- La lettre X est appelée *indéterminée* du polynôme P.

Exemple

1) Le polynôme P_1 défini par : $P_1(X) = 3X^2 - 5X + 1$ est de degré 2. Son coefficient dominant est 3.

2) Le polynôme P_2 défini par : $P_2(X) = X^n - 1$ est de degré n. Son coefficient dominant est 1.

3) Le polynôme P_3 défini par : $P_3(X) = \pi$ est de degré 0. Son coefficient dominant est π.

Proposition 9. (Opérations sur les polynômes)
Soit $(P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Alors il existe $(a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n, c_0, \ldots, c_m) \in \mathbb{K}^{2n+m+3}$ tels que :

$$\begin{aligned} P(X) &= a_0 + a_1\, X + \cdots + a_{n-1}\, X^{n-1} + a_n\, X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k \\ Q(X) &= b_0 + b_1\, X + \cdots + b_{n-1}\, X^{n-1} + b_n\, X^n = \sum_{k=0}^{n} b_k\, X^k \\ R(X) &= c_0 + c_1\, X + \cdots + c_{m-1}\, X^{m-1} + c_m\, X^m = \sum_{k=0}^{m} c_k\, X^k \end{aligned}$$

1) *Définition :*

$$P = Q \ \Leftrightarrow \ \forall i \in [\![0, n]\!], a_i = b_i$$

2) *Somme :*

$$(P+Q)(X) \ = \ (a_0+b_0)+(a_1+b_1)\, X+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})\, X^{n-1}+(a_n+b_n)\, X^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)\, X^k$$

3) *Produit :*

$$(P \times R)(X) \ = \ \sum_{k=0}^{r} c_k X^k \quad \textit{où } r = n + m \textit{ et } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}$$

4) *Multiplication par un scalaire : soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

$$(\lambda \cdot P)(X) \ = \ \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1\, X + \cdots + \lambda\, a_{n-1}\, X^{n-1} + \lambda\, a_n\, X^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \lambda\, a_k\, X^k$$

Proposition 10.
Soit $(P, Q, R) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^3$.

1) *Associativité de + :*
$$(P+Q)+R \ = \ P+(Q+R) \ = \ P+Q+R$$

2) *Commutativité de + :*
$$P+Q \ = \ P+Q$$

3) *Élement neutre pour + :* $0_{\mathbb{K}[X]}$ *est l'élément neutre pour la loi* $+$.
$$0_{\mathbb{K}[X]}+P \ = \ P+0_{\mathbb{K}[X]} \ = \ P$$

4) *Opposé pour + : tout* $P \in \mathbb{K}[X]$ *admet un opposé pour la loi* $+$, *noté* $-P$.
$$P+(-P) \ = \ (-P)+P \ = \ 0_{\mathbb{K}[X]}$$

5) *Associativité de* $\times$ *:*
$$(P \times Q) \times R \ = \ P \times (Q \times R) \ = \ P \times Q \times R$$

6) *Commutativité de* $\times$ *:*
$$P \times Q \ = \ Q \times P$$

7) *Élement neutre pour* $\times$ *: Le polynôme* P_0 *défini par :* $P_0(X) = 1$ *est l'élément neutre pour la loi* $\times$.
$$P_0 \times P \ = \ P \times P_0 \ = \ P$$

8) *Distributivité de* $\times$ *sur + :*
$$P \times (Q+R) \ = \ P \times Q + P \times R \qquad \text{et} \qquad (P+Q) \times R \ = \ P \times R + Q \times R$$

Commentaire

Pour la culture, lorsque $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est donc un corps.

Proposition 11.
Soit $(P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$.

1) $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

2) $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$

On notera bien bien l'inégalité dans le point ***2)*** de la proposition qui précède. Ce `N'est PAS` une égalité. On pourra garder en tête les exemples suivants.

a) On définit les polynômes P_1 et Q_1 par :
$$P_1(X) = X^2+1 \quad \text{et} \quad Q_1(X) = -X^2+2X+3$$
Alors :
$$(P_1+Q_1)(X) \ = \ \cancel{X^2}+1+(-\cancel{X^2}+2X+3) \ = \ 2X+4$$
Ainsi : $\deg(P_1+Q_1) < \max\big(\deg(P_1), \deg(Q_1)\big)$.

b) On définit les polynômes P_2 et Q_2 par :
$$P_2(X) = X^2+1 \quad \text{et} \quad Q_2(X) = -X^3+2X+3$$
Alors :
$$(P_2+Q_2)(X) \ = \ X^2+1+(-X^3+2X+3) \ = \ -X^3+X^2+2X+4$$
Ainsi : $\deg(P_2+Q_2) = \max\big(\deg(P_2), \deg(Q_2)\big)$.

Exercice 7
On définit les polynômes P, Q et R de la manière suivante :

$$P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 1, \quad Q(X) = 5X^2 - 1, \quad R(X) = 2X + 7$$

Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$, $P \times Q \times R$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\begin{aligned}(P+Q)(X) &= 3X^3 - 2X^2 + 1 + 5X^2 - 1 \\ &= 3X^3 + 3X^2 \ = \ 3X^2\,(X+1)\end{aligned}$$

- Ensuite :
$$\begin{aligned}(P \times Q)(X) &= (3X^3 - 2X^2 + 1) \times (5X^2 - 1) \\ &= 15X^5 - 3X^3 - 10X^4 + 2X^2 + 5X^2 - 1 \\ &= 15X^5 - 10X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 1\end{aligned}$$

- De plus :
$$\begin{aligned}\big((P+Q) \times R\big)(X) &= (3X^3 + 3X^2) \times (2X + 7) \\ &= 6X^4 + 21X^3 + 6X^3 + 21X^2 \\ &= 6X^4 + 27X^3 + 21X^2 \ = \ 3X^2\,(2X^2 + 9X + 7)\end{aligned}$$

- Enfin :
$$\begin{aligned}(P \times Q \times R)(X) &= (15X^5 - 10X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 1) \times (2X + 7) \\ &= 30X^6 + 105X^5 - 20X^5 - 70X^4 - 6X^4 - 21X^3 + 14X^3 + 49X^2 - 2X - 7 \\ &= 30X^6 + 85X^5 - 76X^4 - 7X^3 + 49X^2 - 2X - 7\end{aligned}$$

□

Exercice 8 On définit les polynômes P, Q et R de la manière suivante :

$$P(X) = 2X^3 - 1, \quad Q(X) = X^2 + X - 1, \quad R(X) = aX + b$$

- Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$, $P \times Q \times R$.
- Déterminer a et b pour que le degré de $P - QR$ soit le plus petit possible.

Définition Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est *racine de* P (on dit aussi que α est un *zéro de* P) si : $P(\alpha) = 0$.

Proposition 12.
Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

a) *Le réel α est racine de P.*

b) *Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $P(X) = (X - \alpha)\,Q(X)$.*
On dit qu'on peut factoriser le polynôme P par $X - a$.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $P(X) = (X - \alpha)\, Q(X)$.
Alors :

$$P(\alpha) \ = \ (\alpha - \alpha)\, Q(\alpha) \ = \ 0 \times Q(\alpha) \ = \ 0$$

On en déduit que le réel α est racine de P.

($\Rightarrow$) Supposons que α est racine de P. Alors : $P(\alpha) = 0$.
De plus, comme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
P(X) & = & P(X) - P(\alpha) \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, X^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \alpha^k \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(X^k - \alpha^k\right) \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \left(a_k\, (X - \alpha) \sum\limits_{i=0}^{k-1} X^i\, \alpha^{n-1-i} \right) \\
& = & (X - \alpha) \sum\limits_{k=0}^{n} \left(a_k \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha^{n-1-i}\, X^i \right) \\
& = & (X - \alpha) \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_k\, \alpha^{n-1-i}\, X^i \right) \\
& = & (X - \alpha) \sum\limits_{0 \leqslant i < k \leqslant n} a_k\, \alpha^{n-1-i}\, X^i \\
& = & (X - \alpha) \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{k=i+1}^{n} a_k\, \alpha^{n-1-i}\, X^i \right) \\
& = & (X - \alpha) \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\, X^i \qquad \textit{(où : } \forall i \in [\![0, n-1]\!], \ c_i = \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_k\, \alpha^{n-1-i}\textit{)}
\end{array}$$

On note Q le polynôme défini par : $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_i\, X^i$. On a bien :

- $\times$ $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$
- $\times$ $P(X) = (X - \alpha)\, Q(X)$

□

Exercice 9
Déterminer les racines du polynôme P défini par : $P(X) = 2X^3 - 8X$.

Démonstration.
On remarque :

$$P(X) \ = \ 2X^3 - 8X \ = \ 2X\,(X^2 - 4) \ = \ 2X\,(X-2)\,(X+2)$$

D'après la propriété ci-dessus, on en déduit que les racines de P sont : 0, 2 et -2. □

Définition (Multiplicité)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une *racine de multiplicité* k *de* P (on dit aussi que α est une racine d'ordre k de P) si on peut factoriser P par $(X-\alpha)^k$ mais pas par $(X-\alpha)^{k+1}$.

× Lorsque $k=1$, on parle de *racine simple de* P.

× Lorsque $k=2$, on parle de *racine double de* P

× $\cdots$

Exercice 10
Déterminer les racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^3+3X^2-4$. Donner l'ordre de multiplicité de chacune.

Démonstration.

- On commence par remarquer que 1 est racine de P. En effet :
$$P(1) \ = \ 1^3 + 3\times 1^2 - 4 \ = \ 1+3-4 \ = \ 0$$
Ainsi : $P(X) = (X-1)\,Q(X)$ où $Q \in \mathbb{C}_2[X]$. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $Q(X) = X^2+aX+b$.
(On sait que Q est un polynôme unitaire car P est un polynôme unitaire)
- On détermine maintenant a et b par identification.
$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X-1)\,(X^2+aX+b) \\ & = & X^3+aX^2+bX-X^2-aX-b \\ & = & X^3+(a-1)X^2+(b-a)X-b \end{array}$$
Ainsi, par définition de P :
$$X^3+3X^2-4 \ = \ X^3+(a-1)X^2+(b-a)X-b$$
On obtient le système suivant par identification :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a-1 & = & 3 \\ b-a & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} a & & & = & 4 \\ -a & + & b & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} a & & = \ 4 \\ & b & = \ 4 \end{array}\right.$$
On en conclut : $P(X) = (X-1)\,(X^2+4X+4)$.
- On reprend la factorisation :
$$P(X) \ = \ (X-1)\,(X^2+4X+4) \ = \ (X-1)\,(X+2)^2$$

$\square$

Commentaire

Pour factoriser un polynôme, on procède dans l'ordre suivant :

1) on cherche une racine évidente (0, 1, -1, 2, -2), puis on factorise.

2) on cherche à identifier une identité remarquable, puis on factorise

3) deux cas se présentent ensuite :

× si le polynôme restant à factoriser est de degré 2 (et qu'il n'y a donc plus ni racine évidente, ni identité remarquable), alors on détermine les racines restantes avec un calcul de discriminant.

× si le polynôme restant à factoriser est de degré supérieur ou égal à 3, c'est qu'il reste une racine évidente à trouver.

Exercice 11
Déterminer les racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^4 - 10X^3 + 37X^2 - 60X + 36$. Donner l'ordre de multiplicité de chacune.

Théorème 1. (Théorème de d'Alembert-Gauss)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*
- *Si on compte chaque racine avec ordre de multiplicité, alors tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet exactement n racines.*

Théorème 2.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.
Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, P admet au plus n racines.

- ▸ **Initialisation** : soit $P \in \mathbb{K}_0[X]$.
  Alors P est un polynôme constant **non nul**. Il existe donc $c \in \mathbb{K}^*$ tel que : $P(X) = c$.
  Ainsi, l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$. Le polynôme P n'admet donc pas de racine dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire le polynôme P (de degré 0) admet 0 racine dans $\mathbb{K}$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* pour tout $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, P admet au plus $n+1$ racines).
  Soit $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$. Deux cas se présentent :
  - si P n'admet aucune racine, alors P (de degré $n+1$) admet 0 racine, et on a bien : $0 \leqslant \deg(P)$.
  - si P admet au moins une racine, on note celle-ci α.
    Alors il existe $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $P(X) = (X - \alpha)\, Q(X)$.
    Comme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, par hypothèse de récurrence, le polynôme Q admet au plus n racines.
    Le polynôme P en admet donc au plus $n+1$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines. □

Exercice 12
Factoriser le polynôme P défini par : $P(X) = X^3 - X$.

Démonstration.

- On remarque que 0 est racine de P :

$$P(0) \;=\; 0^3 - 0 \;=\; 0$$

- On remarque que 1 est racine de P :

$$P(1) \;=\; 1^3 - 1 \;=\; 0$$

- On remarque que -1 est racine de P :

$$P(-1) \;=\; (-1)^3 - (-1) \;=\; -1 + 1 \;=\; 0$$

Ainsi, le polynôme P admet :

× au moins 3 racines : 0, 1 et -1,

× au plus 3 racines, car : $\deg(P) = 3$.

Le polynôme P admet donc exactement 3 racines : 0, 1 et -1. On en déduit la factorisation suivante :

$$P(X) = X\,(X-1)\,(X+1)$$

□

Proposition 13. HP (Relations coefficients / racines)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
On note P le polynôme défini par : $P(X) = aX^2+bX+c$, et on note z_1 et z_2 ses racines, éventuellement égales. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\[2ex] z_1\, z_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

Démonstration.
Comme z_1 et z_2 sont les racines du polynôme P. On a donc la factorisation suivante :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & a(X-z_1)\,(X-z_2) \\ & = & aX^2 - az_2X - az_1X + az_1z_2 \\ & = & aX^2 - a(z_1+z_2)X + az_1z_2 \end{array}$$

Or, par définition : $P(X) = aX^2 + bX + c$. En identifiant les coefficients des 2 expressions de ce polynôme, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a(z_1+z_2) & = & b \\[2ex] a\,z_1\,z_2 & = & c \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & -\dfrac{b}{a} \\[2ex] z_1\, z_2 & = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right. \qquad (a \neq 0)$$

□

Exercice 13
Soit $a \in [0,1]$. Déterminer le signe des racines du polynôme P défini par : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$.

Démonstration.
On note Δ le discriminant de P. Alors :

$$\Delta \ = \ (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3a \ = \ 16 - 12a \ > \ 0 \quad (\textit{car : } 0 \leqslant a \leqslant 1)$$

Le polynôme P admet dont exactement 2 racines réelles. On les note z_1 et z_2. Alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X-z_1)\,(X-z_2) \\ & = & X^2 - z_2X - z_1X + z_1z_2 \\ & = & X^2 - (z_1+z_2)X + z_1z_2 \end{array}$$

Or, par définition : $P(X) = X^2 - 4X + 3a$. En identifiant les coefficients des 2 expressions de P, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -(z_1 + z_2) & = & -4 \\ \\ z_1\, z_2 & = & 3a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & 4 \\ \\ z_1\, z_2 & = & 3a \end{array} \right.$$

- Tout d'abord : $z_1\, z_2 = 3a > 0$. On en déduit que z_1 et z_2 sont de même signe.
- Ensuite : $z_1 + z_2 = 4 > 0$. Comme z_1 et z_2 sont de même signe, on en déduit : $z_1 > 0$ et $z_2 > 0$.

$\square$

II.3. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du 2^{nd} degré à coefficients réels

Proposition 14.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
On note : $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas se présentent.

1. *si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions* **réelles** *:*

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. *si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution* **réelle** *:*

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3. *si $\Delta < 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions* **complexes** *:*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2}$$

On rappelle que le réel Δ est appelé discriminant *du polynôme P où : $P(X) = aX^2 + bX + c$.*

Démonstration.
On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

- On commence par mettre l'expression $az^2 + bz + c$ sous forme canonique.
  Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcl} az^2 + bz + c & = & a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}\, z + \dfrac{c}{a}\right) \\ \\ & = & a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a}\right) \\ \\ & = & a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right) \\ \\ & = & a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ \\ & = & a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 && \textit{(car } a\neq 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow Z^2=\frac{\Delta}{4a^2} && \textit{(où : } Z=z+\frac{b}{2a}\textit{)}
\end{aligned}$$

- On souhaite donc résoudre l'équation $Z^2=\frac{\Delta}{4a^2}$. Comme $\frac{\Delta}{4a^2}\in\mathbb{R}$, on utilise alors le Corollaire 1. Trois cas se présentent :

  × si $\frac{\Delta}{4a^2}>0$, *i.e.* $\Delta>0$ (car $4a^2>0$), alors l'équation $Z^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ possède exactement deux solutions :

  $$\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

  Ainsi les deux seules solutions de l'équation $Z^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ sont :

  $$Z_1=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } Z_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Reprenons la résolution de l'équation $az^2+bz+c=0$.

  $$\begin{aligned}
  az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow Z^2=\frac{\Delta}{4a^2} \\
  &\Leftrightarrow Z=Z_1 \ \texttt{OU}\ Z=Z_2 \\
  &\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU}\ z+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
  &\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU}\ z=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
  &\Leftrightarrow z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU}\ z=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}
  \end{aligned}$$

  On en déduit que l'équation $az^2+bz+c=0$ admet exactement 2 solutions :

  $$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

× si $\dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$, *i.e.* $\Delta = 0$ (car $4a^2 \neq 0$), alors l'équation $Z^2 = 0$ possède une unique solution : $Z_0 = 0$.
Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow Z = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

× si $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$, *i.e.* $\Delta < 0$ (car $4a^2 > 0$), alors l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ possède exactement deux solutions :

$$i\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } -i\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Ainsi les deux seules solutions de l'équation $Z^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ sont :

$$Z_1 = i\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } Z_2 = -i\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow Z = Z_1 \ \texttt{OU} \ Z = Z_2 \\ &\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = i\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z + \frac{b}{2a} = -i\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z = -\frac{b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \ \texttt{OU} \ z = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

Commentaire

- Notons que dans le cas $\Delta < 0$, les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$: $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont conjuguées.
- Dans le cas $\Delta = 0$, le réel $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ est une racine double du polynôme P, où : $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Exercice 14
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $4z^2 + 3z + 1 = 0$ ***b)*** $z^2 - 2z + 5 = 0$ ***c)*** $z^2 + 6z = 0$

Démonstration.

a) On note Δ le discriminant du polynôme associé à l'équation $4z^2 + 3z - 1 = 0$.

$$\Delta \ = \ 3^2 - 4 \times 4 \times 1 \ = \ 9 - 16 \ = \ -7 \ < \ 0$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{8} \ , \ \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{8} \right\}$.

b) On note Δ le discriminant du polynôme associé à l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

$$\Delta \ = \ (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 \ = \ 4 - 20 \ = \ -16 \ < \ 0$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} \ , \ \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} \right\} = \{1 + 2\,i \ , \ 1 - 2\,i\}$$

c) × Méthode 1 : factorisation à vue.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^2 + 6z \ = \ z\,(z + 6) \ = \ (z - 0)\,\big(z - (-6)\big)$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \{0 \ , \ 6\}$.

× Méthode 2 : utilisation de la proposition précédente.
On note Δ le discriminant du polynôme associé à l'équation $z^2 + 6z = 0$.

$$\Delta \ = \ 6^2 - 4 \times 1 \times 0 \ = \ 36 \ > \ 0$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-6 + \sqrt{36}}{2} \ , \ \frac{-6 - \sqrt{36}}{2} \right\} = \{0 \ , \ 6\}$$

□

> Il est hors de question de fournir un résultat sous la forme d'une fraction non irréductible.
> Dans tout exercice, on simplifiera toujours les expressions obtenues au maximum.

Exercice 15
On note P le polynôme défini par : $P(X) = 2X^3 + 8X^2 + 15X + 14$

1) Montrer que -2 est racine de P.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(X) = (X + 2)\,(aX^2 + bX + c)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.