I. Manipulations de base sur les matrices

Exercice 1
Parmi ces matrices, lesquelles sont triangulaires supérieures ? Inférieures ? Diagonales ? Inversibles ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ***e)*** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ ***g)*** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ***f)*** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***h)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 2
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$.

b) Calculer $3(1-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

c) Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3
Calculer LC et CL où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4
Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

a) Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$.

b) Même question pour $T = (A+B)(2A^2-2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

II. Produit de matrices via la formule du cours

Exercice 5
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $S(A)$ la somme des termes de A.
On note $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = (1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
Vérifier : $J \times A \times J = S(A) \cdot J$.

Exercice 6
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $(i,j) \in [\![1?n]\!]^2$.
On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a) Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b) Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i=j$ et 0 sinon)

III. Équations matricielles

Exercice 7
Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

($i.e.$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $AM = MA$)

Exercice 8
On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A.

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $AB = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) Déterminer toutes les matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $AC = CA = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

IV. Matrices symétriques, transposée

Exercice 10

Soient $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Démontrer : ${}^t(C \times D) = {}^tD \times {}^tC$.

Exercice 11

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}$$

1. Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.

2. Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A\,{}^tA$ est symétrique.

3. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

- ***a)*** Démontrer : AB symétrique $\Leftrightarrow AB = BA$.
- ***b)*** Que dire si elles sont antisymétriques ?
- ***c)*** Que dire si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

V. Trace d'une matrice

Exercice 12

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de A* et on note $tr(A)$, le nombre $\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

a) Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $tr(I_n)$ et $tr\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right)$?

b) Démontrer, pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$: $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

c) Démontrer, pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$: $tr(AB) = tr(BA)$.

d) En déduire que l'équation $AB - BA = I_n$, d'inconnues $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, n'a pas de solution.

Exercice 13

Trouver toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $tr(A\,{}^tA) = 0$.

VI. Inverse d'une matrice A

Exercice 14

a) Soit A une matrice inversible.
Démontrer que l'inverse de A est définie de manière unique.

b) Soient $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ inversibles.
Montrer que AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

c) Soient $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}\right)^2$, vérifiant : $AB = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
Montrer que ni A ni B n'est inversible.

d) Donner un exemple de matrices carrées A et B non nulles telles que : $AB = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 15

Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

- la matrice B admet une inverse à gauche : $\exists A_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A_1 B = I_n$,
- la matrice B admet une inverse à droite : $\exists A_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ BA_2 = I_n$.

Démontrer : $A_1 = A_2$.

VII. Obtention de l'inverse de A par une relation $AB = I_n$

Exercice 16

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et vérifier : $A^2 = 2\,I_3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18

On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2, A^3 puis démontrer : $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

c) Démontrer : $B^3 - 3B^2 + 2B = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

d) En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 19

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $A^2 - A - 2\,I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 20

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que : $AB = A + I_n$.

a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

b) En déduire : $AB = BA$.

VIII. Calcul d'inverse par pivot de Gauss

Exercice 21

Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

IX. Puissance $m^{\text{ème}}$ par récurrence

Exercice 22

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = 1 - 2I_3$.

a) Démontrer : $B^2 = 3B$.

b) En déduire par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 2^n\,I_3 + \dfrac{5^n - 2^n}{3}\,B$.

X. Puissance $m^{\text{ème}}$ par la formule du binôme

Exercice 23

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2, B^3 et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n.

b) Calculer (simplifier !) A^n par la formule du binôme.

Exercice 24

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier : $(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

b) En utilisant le fait que $A = (A - I_4) + I_4$, calculer, pour $n \geqslant 2$, A^n.

Exercice 25

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n.

Exercice 26

Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^2 = P$.

a) Montrer que si P est inversible, alors : $P = I_n$.
Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle, ni égale à I_n.

b) Montrer que la matrice $Q = I_n - P$ vérifie aussi : $Q^2 = Q$.

c) Démontrer : $PQ = QP = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

d) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I + P)^n$.

XI. Puissance $m^{\text{ème}}$ de matrices et suites définies par récurrence

Exercice 27

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier : $A^2 = A + 2\, I_3$.
En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n\, A + v_n\, I_n$.
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, u_n, v_{n+1} et v_n.

c) On pose : $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
Reconnaître les suites (α_n) et (β_n).

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n, puis A^n.

Exercice 28

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 6u_n & - & v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & 4v_n \end{array} \right.$$

a) Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5\, I_2 + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

c) Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 29

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2\, u_{n+2} + u_{n+1} - 2\, u_n \end{array} \right.$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier : $Q = P^{-1}$.

b) Que vaut $D = QAP$? En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nA$.
En déduire les coefficients de A^n.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
Vérifier : $X_{n+1} = A\, X_n$. En déduire une expression de u_n en fonction de n.