I. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun, théorèmes de Gauss et de Bézout

Exercice 1
Soit p un entier naturel qui n'est divisible ni par 2 ni par 3. Démontrer : $24 \mid p^2-1$.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$ n'est pas décimal.

Exercice 3
Montrer que si la somme de deux rationnels est entière, leurs représentants irréductibles ont même dénominateur.

Exercice 4
Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Exercice 5
Montrer qu'il n'existe pas de solution rationnelle à l'équation $x^4+x+1=0$ d'inconuue réelle x.

Exercice 6
Montrer qu'il n'existe pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$ à l'équation $8x^4-3y^2=2$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = 1$. On note $\mathcal{P} = \{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \mid au+bv=1\}$.

1. Démontrer : $\mathcal{P} \neq \varnothing$.

2. Soit alors $(\alpha,\beta) \in \mathcal{P}$. Démontrer : $\mathcal{P} = \{\, (\alpha+\lambda b, \beta-\lambda a) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \,\}$.

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $34x+147y=2$.

Exercice 9
Trouver un entier naturel dont le produit des diviseurs vaut 45^{42}.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $(n!+1) \wedge \big((n+1)!+1\big) = 1$.

Exercice 11
Soit $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $p \wedge q = 1$. Démontrer : $p \wedge r = p \wedge qr$.

Exercice 12
Soit $(a,b) \in [\![0,10]\!]^2$.

1. Montrer que a^2+b^2 est divisible par 11 si et seulement si $a=b=0$.
Indication : on pourra faire une étude exhaustive de tous les cas.

2. En déduire que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, 11 divise a^2+b^2 si et seulement si 11 divise a et 11 divise b.

II. Congruences

Soit $(a,b,n) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^*$. On dit que a est congru à b modulo n et on note $a \equiv b\ [n]$ si et seulement si n divise $b-a$. En notant a, b, c et d quatre entiers relatifs, n un entier relatif non nul et p un entier naturel, on peut énoncer les propriétés utiles de la relation de congruence modulo n, que l'on peut utiliser sans preuve.

(1) Symétrie : Si $a \equiv b\ [n]$, alors $b \equiv a\ [n]$.

(2) Transitivité : Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv c\ [n]$.

(3) Compatibilité avec la somme : Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors $a+c \equiv b+d\ [n]$.

(4) Compatibilité avec le produit : Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$, alors $ac \equiv bd\ [n]$.

(5) Compatibilité avec l'exponentiation entière : Si $a \equiv b\ [n]$, alors $a^p \equiv b^p\ [n]$.

Exercice 13
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}^*)^2$. Démontrer :

1. si $a \equiv b\ [c]$ et $d \mid c$, alors $a \equiv b\ [d]$

2. si $a \equiv b\ [c]$ et $a \equiv b\ [d]$, alors $a \equiv b\ [c \vee d]$.

3. si $ac \equiv bc\ [d]$ et $c \neq 0$, alors $a \equiv b\ [d/(d \wedge c)]$

Exercice 14
Soit $(a,b,n) \in \mathbb{Z}^3$. On veut résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ ax \equiv b\ [n]$.

1. Montrer que, si (E) admet une solution, alors $a \wedge n \mid b$.

2. On suppose : $a \wedge n \mid b$. Justifier l'existence de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a \wedge n = \alpha a + \beta n$.
Montrer alors que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{\, (\alpha b + \lambda n)/(a \wedge n) \mid \lambda \in \mathbb{Z} \,\}$$

Exercice 15
Soit $(a,b,\alpha,\beta) \in (\mathbb{Z}^*)^4$. On veut résoudre dans Z : $(E)\ x \equiv \alpha\ [a]$ et $x \equiv \beta\ [b]$.

1. Montrer que si (E) admet une solution, alors : $a \wedge b \mid \alpha - \beta$.

2. On pose : $a' = a/(a \wedge b)$ et $b' = b/(a \wedge b)$. Montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a'u + b'v = 1$.
On pose alors : $y = a'u\beta + b'v\alpha$. Montrer que, si $a \wedge b \mid \alpha - \beta$, alors y est solution de (E) et que l'ensemble des solutions de (E) est $\{y + \lambda(a \vee b) \mid \lambda \in \mathbb{Z}\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 3\ [4] \\ x \equiv 4\ [5] \end{cases}$

Exercice 16
Soit $x \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $x^2 \equiv 1\ [35]$ si et seulement si $\big(x \equiv 1\ [5]$ ou $x \equiv -1\ [5]\big)$ et $\big(x \equiv 1\ [7]$ ou $x \equiv -1\ [7]\big)$.

2. Résoudre alors l'équation $x^2 \equiv 1\ [35]$.

Exercice 17
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$: $p \mid \dbinom{p}{k}$.

2. En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$: $a^p \equiv a\ [p]$.

Exercice 18

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les décimales d'un entier naturel n pour que $3 \mid n$ (resp. $11 \mid n$).

2. En quelles bases l'écriture d'un entier naturel donné en base 10 est-elle évidente à trouver ?

3. Étudier alors la divisibilité de 11 257 838 271 654 382 948 276 par 7, puis par 37.

Exercice 19
Quel est le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de $7^{(7^7)}$?

III. Nombres premiers

Exercice 20
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel n pour que $-1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ soit un nombre premier.

Exercice 21
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, il en est de même de n. Que dire de la réciproque ?

Exercice 22
Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n + 1$ soit premier. Montrer que a est pair, puis qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^m$.
Indication : on pourra écrire n sous la forme d'un produit d'un nombre impair et d'une puissance de 2.

Exercice 23
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier positif. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 2^{(2^{n-1})}$.

Exercice 24
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.