I. Écriture d'un complexe

Exercice 1

Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :

a) $\dfrac{2+3i}{4-i}$

b) $\dfrac{(1-i)^3}{2+i}$

c) $\dfrac{(2+i)^3}{(1+2i)^2}$

d) $\left((1+i)^2+2-i\right)^5$

Exercice 2

Pour chaque complexe z qui suit, déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $z=a+bj$.

a) $(2+3j-j^2)^3$

b) $\dfrac{(1-j)^4}{2+j}$

c) $\dfrac{(2+j^2)^2}{(1+j)^7}$

Exercice 3

Soit a un nombre complexe de module 1.
Donner le module et un argument de $a+i\bar{a}$ en fonction d'un argument de a.

Exercice 4

1. Écrire sous forme trigonométrique les complexes $-1-i$, $1-i\sqrt{3}$ et leur produit.

2. En déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{11\,\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{11\,\pi}{12}\right)$.

Exercice 5

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $z_n=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que z_n est un réel si et seulement si 12 divise $7n$.

2. En déduire l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}\mid z_n\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 6

On désigne par x un réel tel que $\dfrac{x}{\pi}$ ne soit pas un entier impair.

1. Donner les formes algébrique et trigonométrique de $\dfrac{1+i\,\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-i\,\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

2. Retrouver les expressions de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

3. Montrer que, pour tout $(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{2\alpha}{\pi}$ et $\dfrac{2n\alpha}{\pi}$ ne soient pas des entiers impairs, on a :

$$\left(\frac{1+i\,\tan(\alpha)}{1-i\,\tan(\alpha)}\right)^n=\frac{1+i\,\tan(n\alpha)}{1-i\,\tan(n\alpha)}$$

II. Conjugaison d'un complexe

Exercice 7

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ vérifiant $(c,d)\neq(0,0)$ pour que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ soit réel.

Exercice 8

Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $z\in\mathbb{U}$.

Exercice 9

Soit $(a,b)\in\mathbb{C}\times\left(\mathbb{C}\setminus\{1\}\right)$.

Montrer que $\dfrac{a-b\bar{a}}{1-b}$ est réel si et seulement si a est réel ou b est de module 1.

Exercice 10
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Démontrer : $|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

Exercice 11
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\bar{a}b \neq 1$. On pose : $c = \dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}$.

1. Démontrer que $|c| = 1$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.

2. Démontrer que $|c| < 1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictements supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

III. Linéarisation et factorisation

Exercice 12
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Linéariser les expressions de $\big(\sin(x)\big)^n$ et $\big(\cos(x)\big)^n$.

Exercice 13
Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Factoriser les expressions de $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$.

IV. Calculs de sommes et produits

Dans tous les exercices qui suivent, « calculer » signifie donner une expression du réel ou complexe manipulé ne faisant apparaître ni de symbole de sommation, ni de symbole de produit.

Exercice 14
On pose : $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$. Calculer $\dfrac{u}{1+u^2} + \dfrac{u^2}{1+u^4} + \dfrac{u^3}{1+u^6}$.

Exercice 15

1. Vérifier, pour tout réel α : $1 - \mathrm{e}^{i\alpha} = -2i \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{i\alpha}{2}}$

2. Démontrer alors : $\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{11}} + \mathrm{e}^{\frac{9i\pi}{11}} = \dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{11}}$

3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{11}\right)+\cos\left(\dfrac{9\pi}{11}\right)$.

Exercice 16
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Exercice 17
Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \big(\cos(p\alpha)\big)^2$.

Exercice 18
Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tel que : $\cos(\alpha) \neq 0$. Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{\cos(p\alpha)}{\big(\cos(\alpha)\big)^p}$.

Exercice 19
Soit $(a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$.

1. Développer l'expression $(1+i\sqrt{a})^{2n}$.

2. Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dbinom{2n}{2k} a^k$.

3. Donner une expression simple du résultat lorsque $a = 3$.

Exercice 20
Soit $(n,\alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

1. Calculer le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

2. Vérifier que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Calculer alors le réel $\sum\limits_{k=0}^{n} k \dbinom{n}{k} \cos(k\alpha)$.

3. En s'inspirant de la question précédente, calculer les réels suivants :

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\dbinom{n}{k}\cos(k\alpha)$ **b)** $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\dbinom{n}{k}\cos(k\alpha)$

Exercice 21

Soit $(n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$. On pose : $\varphi : h \mapsto \sum\limits_{p=0}^{n} \cos(x+ph)$.

1. Déterminer une expression sans symbole de sommation de la fonction φ.

2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} p\,\sin(x+ph)$.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, on pose : $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p\, \mathrm{e}^{\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Démontrer, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$: $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{p=0}^{n-1} b_p\, \mathrm{e}^{-\frac{2ipk\pi}{n}}$.

Exercice 23

Soit $(n,z) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{C}$. On pose : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(z+\omega^k\right)^n$.

Exercice 24

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à $p-1$, on appelle $N_{n,p,k}$ le plus grand entier naturel r tel que $pr+k \leqslant n$ et on pose :

$$S_{n,p,k} = \sum_{r=0}^{N_{n,p,k}} \binom{n}{pr+k}$$

1. En développant les expressions $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, démontrer :

$$\begin{cases} S_{n,2,0} + S_{n,2,1} = 2^n \\ S_{n,2,0} - S_{n,2,1} = 0 \end{cases}$$

En déduire les valeurs de $S_{n,2,0}$ et $S_{n,2,1}$.

2. Justifier, pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'égalité :

$$(1+a)^n = \sum_{r=0}^{N_{n,3,0}} \binom{n}{3r} a^{3r} + \sum_{r=0}^{N_{n,3,1}} \binom{n}{3r+1} a^{3r+1} + \sum_{r=0}^{N_{n,3,2}} \binom{n}{3r+2} a^{3r+2}$$

En développant alors $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$, démontrer :

$$\begin{cases} S_{n,3,0} + S_{n,3,1} + S_{n,3,2} = 2^n \\ S_{n,3,0} + j\,S_{n,3,1} + j^2\,S_{n,3,2} = (1+j)^n \\ S_{n,3,0} + j^2\,S_{n,3,1} + j\,S_{n,3,2} = (1+j^2)^n \end{cases}$$

En déduire des expressions de $S_{n,3,0}$, $S_{n,3,1}$ et $S_{n,3,2}$ en fonction de n et j.
Indication : Pour résoudre le système, on pourra utiliser le fait que $1+j+j^2 = 0$ *et chercher des combinaisons linéaires des équations du système considéré donnant directement chaque complexe cherché.*

Donner alors des expressions explicites de $S_{n,3,0}$, $S_{n,3,1}$ et $S_{n,3,2}$ sous forme de réels, en fonction de n.

3. Décrire une méthode permettant, en théorie, de déterminer tous les réels de l'ensemble $\{S_{n,p,k} \mid k \in [\![0,p-1]\!]\}$. On ne cherchera pas à prouver la validité de cette méthode.

V. Résolution d'équations

Exercice 25

Donner la forme algébriques des solutions complexes des équations suivantes :

(1) $z^2 + 2(i-1)z + 8 - 2i = 0$

(2) $z^4 - 3iz^2 + i - 3 = 0$

(3) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$

(4) $z^2 + 3(i-1)z + 2 - 3i = 0$

Exercice 26

Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Donner la forme trigonométrique des solutions complexes des équations suivantes :

(1) $z^4 - 2\sin(\alpha)z^2 + \big(\tan(\alpha)\big)^2 = 0$

(2) $z^2 - 2i\sin(\alpha)z + 2\big(1+\cos(\alpha)\big) = 0$

(3) $(z+1)^n = z^n$

(4) $z^6 + (1-2i)z^3 = i + 1$

(5) $z^{2n} + 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$

(6) $(z^2+1)^n = 1$

Exercice 27

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère l'équation :

$$(E) \qquad (z^3+1)^{n-1} + (z^3+1)^{n-2} + \cdots + (z^3+1)^2 + (z^3+1) + 1 \ = \ 0$$

d'inconnue complexe z. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E). Dans tout cet exercice, on ne cherchera pas spécialement à mettre les résultats sous forme algébrique ou trigonométrique.

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_k$ des racines cubiques de $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$.

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le complexe z est solution de (E) si et seulement si $(z^3+1)^n - 1 = 0$.

3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 28

Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équation d'inconnue complexe z :

$$\begin{cases} |z| &= 1 \\ iz &= \bar{z} \end{cases}$$

Exercice 29

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 \ = \ 0$$

Indication : on pourra remarquer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $8|z|^2 - 3$ est un réel.

Exercice 30

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^5 + \bar{z}^5 + z^7 \ = \ 0$$

Exercice 31

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

$$\begin{cases} |z| &= |z+2| \\ \arg(z) &= \arg(z+3+i) \ [2\pi] \end{cases}$$

Indication : on pourra mener une analyse géométrique du problème.

VI. Liens entre coefficients et racines d'un polynôme de degré 2

Une expression de deux variables complexes a et b, algébrique (c'est-à-dire ne mettant en jeu que les opérations +, −, × et /), symétrique (c'est-à-dire dans laquelle on peut échanger a et b sans en modifier la forme) peut être écrite de manière algébrique en fonction uniquement de a + b et ab. On peut chercher cette écriture dans chaque cas particulier.

Exercice 32

On pose : $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^7$.

1. Calculer $S + T$ et ST.

2. En déduire les valeurs de ces complexes.

Exercice 33

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la fonction polynomiale :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 2z^2 + z + a \end{array}$$

On note α et β les deux racines de P, que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

Donner l'expression explicite d'une fonction polynomiale de degré 2 dont les deux racines sont α^2, β^2, α et β n'apparaissant pas dans le résultat.

Exercice 34

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère les deux fonctions polynomiales :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + az + 1 \end{array} \qquad Q : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 + az^2 - 2 \end{array}$$

On note α et β les deux racines de P, que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

1. On pose $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$. Développer l'expression $Q(\alpha)\,Q(\beta)$ et exprimer ce complexe uniquement en fonction des complexes s, p et a (on ne cherchera pas à simplifier l'expression finale).

2. Montrer que P et Q ont une racine commune si et seulement si $2a^4 + 4a^3 - 2a^2 - 6a + 5 = 0$.

Exercice 35

On considère le système de deux équations à deux inconnues complexes x et y défini par :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x^2 & + & y^2 & = & 2 \\ x^3 & + & y^3 & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. On pose $s = x + y$ et $p = xy$. Montrer que (x, y) est solution de (S) si et seulement si :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} s^2 & - & 2p & = & 2 \\ s^3 & - & 3sp & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Résoudre le système (E).
En déduire que (x, y) est solution de (S) si et seulement si x et y sont les deux racines d'une des trois fonctions polynomiales suivantes :

$$z \mapsto z^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad z \mapsto z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 \qquad \text{ou} \qquad z \mapsto z^2 + \sqrt{6}\,z + 2$$

3. Résoudre le système (S).

Exercice 36

Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$. On désigne par (E) l'équation $z^2 + az + b = 0$ d'inconnue complexe z.

1. On suppose que les racines de (E) sont de module 1. Démontrer :

$$|b| = 1 \qquad \text{et} \qquad |a| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \arg(b) = 2\arg(a)\ [2\pi]$$

2. Établir la réciproque du résultat établi dans la question précédente.

Exercice 37

On considère la fonction polynomiale :

$$P : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2+3z-1 \end{array}$$

On note a et b les racines de P, éventuellement confondues, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = a^n + b^n$.

1. Exprimer a^2+b^2 en fonction de $(a+b)^2$ et de ab. En déduire la valeur de S_2.

2. En travaillant de manière analogue à la question précédente, calculer S_3.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$(a+b)^{2n} = \binom{2n}{n}(ab)^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}(ab)^k\left(a^{2n-2k}+b^{2n-2k}\right)$$

En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}(-1)^k\,S_{2n-2k} = 9^n - (-1)^n\binom{2n}{n}$$

Calculer alors S_4 et S_6.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$(a+b)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(ab)^k\left(a^{2n+1-2k}+b^{2n+1-2k}\right)$$

En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\,S_{2n+1-2k} = -3\times 9^n$$

Calculer alors S_5 et S_7.