Exercice 1
On considère la proposition : « s'il pleut, mon jardin est mouillé ». Quelle est sa négation ?

a) « s'il ne pleut pas, mon jardin n'est pas mouillé »

b) « s'il ne pleut pas, mon jardin est mouillé »

c) « si mon jardin n'est pas mouillé, il ne pleut pas »

d) « il pleut et mon jardin n'est pas mouillé »

e) autre réponse

Exercice 2
Soient p, q et r trois propositions. Démontrer :

1) $\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q) \iff \texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q)$

2) $\texttt{NON}(p \texttt{ OU } q) \iff \texttt{NON}(p) \texttt{ ET } \texttt{NON}(q)$

3) $p \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } q) \iff p$

4) $p \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } q) \iff p$

5) $p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r) \iff (p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)$

6) $p \texttt{ OU } (q \texttt{ ET } r) \iff (p \texttt{ OU } q) \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } r)$

7) $\big((p \Rightarrow q) \texttt{ ET } (q \Rightarrow r)\big) \implies (p \Rightarrow r)$

8) $(p \Rightarrow q) \implies \big((r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)\big)$

Exercice 3
Soient a et b deux nombres réels. Démontrer l'implication :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & a & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & b & \leqslant & 1 \\ & & ab & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow a = b = 1$$

Exercice 4

1. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes, définies sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls (certaines sont vraies, d'autres fausses).
   - tout entier est le carré d'un entier.
   - tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.
   - certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.
   - aucun entier n'est plus grand que tous les autres.

2. Exprimer la négation de ces propositions.

Exercice 5
Évaluer les deux propositions suivantes :
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$
- $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$

Exercice 6
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Énoncer (à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques) les propriétés suivantes, ainsi que leur négation.

a) f est constante sur $\mathbb{R}$;

b) f est croissante sur $\mathbb{R}$;

c) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

d) f est paire ;

e) f est monotone sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

a) Que signifie la proposition : « f est périodique » ?

b) Soit $T \in \mathbb{R}$. Que signifie la proposition : « f est périodique de période T » ?

c) On suppose que pour tout T réel, f est périodique de période T. Montrer que f est constante.

Exercice 8
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Discuter l'évaluation des 2 propositions suivantes.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant M$
- $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$

2. Donner la négation de la seconde.

Exercice 9

a) Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant la propriété $\mathcal{A}(x)$: $\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon$.

b) Même question pour la propriété $\mathcal{A}_1(x)$: $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$.

c) Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big((\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon) \Rightarrow (x \leqslant y)\big)$

Exercice 10
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant axy$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \geqslant -axy$

2. Pour quelles valeurs de a sont-elles vraies ?