DS3

Exercice 1 (Bac S 2020 (Polynésie))

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 2\,a_n \end{array} \right.$$

1. Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3.

Démonstration.

- Par définition de a_2 et de b_2 :

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} a_2 & = & a_1 + b_1 & = & 1+0 & = & 1 \\ b_2 & = & 2\,a_1 & = & 2 \times 1 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{a_2 = 1 \text{ et } b_2 = 2}$$

- Par définition de a_3 et de b_3 :

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} a_3 & = & a_2 + b_2 & = & 1+2 & = & 3 \\ b_3 & = & 2\,a_2 & = & 2 \times 1 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{a_3 = 3 \text{ et } b_3 = 2}$$

□

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: a_n et b_n sont des entiers naturels.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. On a donc bien que a_1 et b_1 sont des entiers.
D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* a_{n+1} et b_{n+1} sont des entiers naturels).
Par définition de a_{n+1} et b_{n+1} :
$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 2\,a_n \end{array} \right.$$
Or a_n et b_n sont des entiers naturels, et 2 aussi. On en déduit que a_{n+1} et b_{n+1} sont aussi des entiers naturels.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \text{ et } b_n \text{ sont des entiers naturels.}}$$

□

3. a) Donner M^2.

Démonstration.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

□

b) Démontrer : $M^2 = M + 2\,I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

Démonstration.

$$M + 2\,I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M^2$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } M^2 = M + 2\,I.}$$

□

c) Démontrer alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = a_n\,M + b_n\,I$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : M^n = a_n\,M + b_n\,I$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $M^1 = M$.
  - D'autre part : $a_1\,M + b_1\,I = 1 \cdot M + 0 \cdot I = M$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $M^{n+1} = a_{n+1}\,M + b_{n+1}\,I$).

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= M \times (a_n\,M + b_n\,I) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= a_n\,M^2 + b_n\,M \\ &= a_n\,(M + 2\,I) + b_n\,M && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= a_n\,M + 2\,a_n\,I + b_n\,M \\ &= (a_n + b_n)\,M + 2\,a_n\,I \\ &= a_{n+1}\,M + b_{n+1}\,I && \textit{(par définition de } a_{n+1} \textit{ et } b_n\textit{)} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = a_n\,M + b_n\,I.}$$

□

4. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On pose encore : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} = A\, X_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A\, X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ 2\, a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_{n+1} = A\, X_n}$$

□

b) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, la matrice X_n en fonction de A^{n-1} et de X_1.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n = A^{n-1}\, X_1$.

- **Initialisation** :

$$A^{2-1}\, X_1 = A^1\, X_1 = A \times X_1 = X_2 \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1} = A^n\, X_1$).

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A\, X_n && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= A \times A^{n-1}\, X_1 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^n\, X_1 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ X_n = A^{n-1}\, X_1}$$

□

c) Justifier que P est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On note P^{-1} cette matrice.

Démonstration.
On note : $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifions : $PQ = I_2$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

Attention aux erreux de logique : avant d'avoir démontré $PQ = I$, on ne sait pas encore que la matrice P est inversible, et on ne sait donc par encore que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice P^{-1}. C'est pourquoi on la nomme différemment.

□

d) Vérifier que $P^{-1}\,A\,P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$AP \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
- Ensuite :
$$P^{-1}AP \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, en notant } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (qui est bien diagonale), on a : } D = P^{-1}AP.}$$

□

e) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Démonstration.

- On remarque tout d'abord :
$$\begin{array}{lrcl} & D & = & P^{-1}AP \\ \text{donc} & PD & = & P\,P^{-1}AP \;=\; AP \\ \text{d'où} & PDP^{-1} & = & AP\,P^{-1} \;=\; A \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A = PDP^{-1}.}$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.
  - **Initialisation** :
    - × D'une part : $A^1 = A$
    - × D'autre part : $PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = A$ (d'après le point précédente)

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).
$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times PD^nP^{-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & = & PD \times P^{-1}P \times D^nP^{-1} & \\ & = & PD \times I \times D^nP^{-1} & \\ & = & PD^{n+1}P^{-1} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

□

f) **On admet**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^{n-1} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^{n} \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^{n} \end{pmatrix}$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{3} \times \big(2^n + (-1)^{n-1}\big)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, par définition de X_n : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
- Deux cas se présentent alors :
  × si $n \geqslant 2$, alors, d'après ***4.b)*** :

$$\begin{aligned} X_n &= A^{n-1}\, X_1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^{n} \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$a_n \;=\; \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} \;=\; \frac{1}{3} \times \big(2^n + (-1)^{n-1}\big)$$

  × si $n = 1$, alors :
    × d'une part : $a_1 = 1$.
    × d'autre part : $\dfrac{1}{3} \times \big(2^1 + (-1)^{1-1}\big) = \dfrac{1}{3} \times \big(2+1\big) = 1$

  Ainsi : $a_1 = \dfrac{1}{3} \times \big(2^1 + (-1)^{1-1}\big)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{3} \times \big(2^n + (-1)^{n-1}\big).}$$

□

5. Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $2^{4k} - 1 \equiv 0\ [5]$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $2^4 = 16$, alors :

$$\begin{array}{lccl} & 2^4 & \equiv & 1 \quad [5] \\ \text{donc} & \big(2^4\big)^k & \equiv & 1^k \quad [5] \\ \text{d'où} & 2^{4k} & \equiv & 1 \quad [5] \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \in \mathbb{N},\ 2^{4k} - 1 \equiv 0\ [5].}$$

□

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 4.

a) Montrer que $3\,a_n$ est divisible par 5.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après *4.f)* :
$$a_n \;=\; \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^{n-1}\right)$$
- Ensuite, comme n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 4k$.
- On en déduit :
$$a_n \;=\; \frac{1}{3}\left(2^{4k} + (-1)^{4k-1}\right) \;=\; \frac{1}{3}\left(2^{4k} - 1\right)$$
où la dernière égalité est obtenue car $4k-1$ est un entier impair. Ainsi : $3\,a_n = 2^{4k} - 1$.
- Or, d'après la question précédente : $2^{4k} - 1 \equiv 0\ [5]$. D'où : $3\,a_n \equiv 0\ [5]$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, } 3\,a_n \text{ est divisible par 5.}}$$ □

b) Écrire en **Python** une fonction `Test_Div` prenant en paramètre un entier `n` et renvoyant un message indiquant si l'entier a_n est divisible par 5.
On pourra utiliser la commande prédéfinie en ***Python*** *pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`*. Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie 3 : le reste dans la division euclidienne de 11 par 4.*

Démonstration.
On propose la fonction suivante.

```
1  def Test_Div(n) :
2      a = (1/3) * (2**n + (-1)**(n-1))
3      if a % 5 == 0 :
4          return print(“L’entier a_“ + str(n) + “ est divisible par 5“)
5      else :
6          return print(“L’entier a_“ + str(n) + “ n’est pas divisible par 5“)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `Test_Div`,
  × elle prend en entrée un paramètre `n`,
  × elle renvoie en sortie une chaîne de caractère.

```
1  def Test_Div(n) :
```

- **Contenu de la fonction**
La ligne 2 consiste à calculer la valeur de a_n à l'aide de la formule trouvée en question *4.f)*, et stocker le résultat dans la variable `a`.

```
2      a = (1/3) * (2**n + (-1)**(n-1))
```

On souhaite ensuite tester si l'entier $a_{\mathtt{n}}$ est divisible par 5, c'est-à-dire tester si le reste de la division euclidienne de $a_{\mathtt{n}}$ par 5 est nul. Si c'est le cas, on renvoie un message indiquant que $a_{\mathtt{n}}$ est divisible par 5. Sinon on renvoie le message contraire. On utilise pour cela une structure conditionnelle.

```
    if a % 5 == 0 :
        return print(“L’entier a_“ + str(n) + “ est divisible par 5“)
    else :
        return print(“L’entier a_“ + str(n) + “ n’est pas divisible par 5“)
```

$\square$

Exercice 2

1. Démontrer : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

Démonstration.
cf cours. □

2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaus sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale A.
- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3\,L_3 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération $\{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la matrice } A \text{ est inversible et : } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

□

3. a) Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « tout réel est le cube d'un réel ». Cette assertion est-elle vraie ?

Démonstration.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\, \exists x \in \mathbb{R},\, y = x^3}$$

Cette assertion est vraie car la fonction $f : x \mapsto x^3$ est surjective sur $\mathbb{R}$ (c'est en fait la définition de la surjectivité de f sur $\mathbb{R}$).

□

b) Écrire la négation de la proposition précédente. Cette assertion est-elle vraie ?

Démonstration.

$$\boxed{\exists y \in \mathbb{R},\, \forall x \in \mathbb{R},\, y \neq x^3}$$

Cette assertion est fausse car c'est la négation d'une assertion vraie.

□

Exercice 3 (Bac S 2018 (Réunion))

Dans cette exercice, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On dit qu'un point M a pour affixe z s'il a pour coordonnées $\big(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\big)$. Par exemple, le point d'affixe $2-3i$ a pour coordonnées $(2,-3)$.
Soient $M=(x_M, y_M)$ et $N=(x_N, y_N)$ deux points du plan. On rappelle que la longueur MN s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$MN \;=\; \sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$$

On pose $z_0=8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} \;=\; \frac{3-i\sqrt{3}}{4}\, z_n \qquad (*)$$

On note A_n le point d'affixe $z_n = x_n + iy_n$.

1. a) Calculer z_1, z_2 et z_3. On mettra les résultats sous forme algébrique.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$z_1 \;=\; \frac{3-i\sqrt{3}}{4}\, z_0 \;=\; \frac{3-i\sqrt{3}}{4} \times 8 \;=\; 2\,\big(3-i\sqrt{3}\big)$$

$$\boxed{z_1 = 6 - 2\,i\,\sqrt{3}}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{3-i\sqrt{3}}{4}\, z_1 \\ &= \frac{3-i\sqrt{3}}{4} \times 2\,\big(3-i\sqrt{3}\big) \\ &= \frac{1}{2}\,(3-i\sqrt{3})^2 \\ &= \frac{1}{2}\,(9-6i\sqrt{3}+3i^2) \\ &= \frac{1}{2}\,(9-6i\sqrt{3}-3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } z_2 = \frac{1}{2}\,(6-6i\sqrt{3}) = 3-3i\sqrt{3}.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{3-i\sqrt{3}}{4}\, z_2 \\ &= \frac{3-i\sqrt{3}}{4} \times \big(3-3i\sqrt{3}\big) \\ &= \frac{1}{4}\,\big(9-9i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+3i^2(\sqrt{3})^2\big) \\ &= \frac{1}{4}\,(9-12i\sqrt{3}-9) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } z_3 = \frac{1}{4}\,(-12i\sqrt{3}) = -3i\sqrt{3}.}$$

□

b) Calculer les longueurs OA_0, OA_1, OA_2 et OA_3.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$OA_0 = \sqrt{(x_{A_0} - x_O)^2 + (y_{A_0} - y_O)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{8^2} = 8$$

$$\boxed{OA_0 = 8}$$

- Ensuite, d'après la question précédente :

$$OA_1 = \sqrt{(x_{A_1} - x_O)^2 + (y_{A_1} - y_O)^2} = \sqrt{3^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$$

$$\boxed{OA_1 = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}}$$

- De même :

$$OA_2 = \sqrt{(x_{A_2} - x_O)^2 + (y_{A_2} - y_O)^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36}$$

$$\boxed{OA_2 = \sqrt{36} = 6}$$

- Enfin :

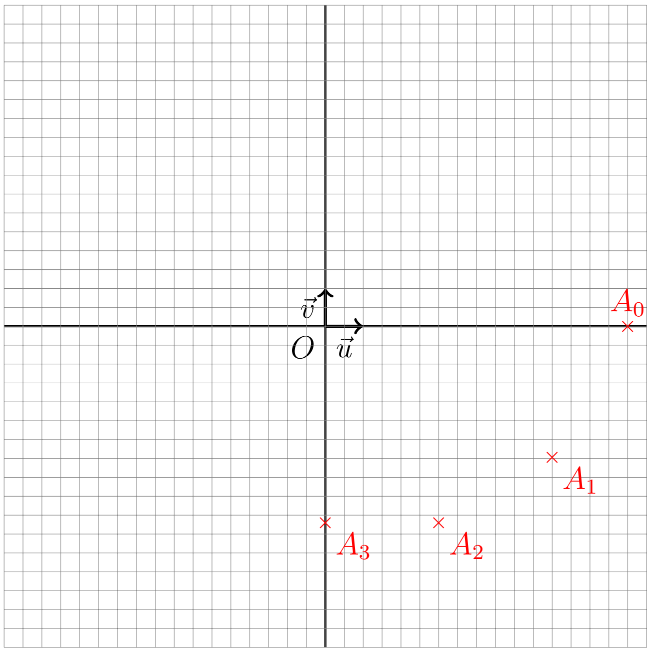
$$OA_3 = \sqrt{(x_{A_3} - x_O)^2 + (y_{A_3} - y_O)^2} = \sqrt{0^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\boxed{OA_3 = 3\sqrt{3}}$$

□

c) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre. On donne par ailleurs : $\sqrt{3} \approx 1,7$.

Démonstration.



□

2. On note (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = OA_n$.

a) En utilisant $(*)$, démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{3\,x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = \frac{3\,y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après $(*)$:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\, z_n \\ &= \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\, (x_n + iy_n) \\ &= \frac{1}{4}\, (3x_n + 3iy_n - ix_n\sqrt{3} - i^2 y_n\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{4}\, \big(3x_n + y_n\sqrt{3} + i(3y_n - x_n\sqrt{3})\big) \\ &= \frac{3x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} + i\, \frac{3y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\, z_n$$

donc $\quad x_{n+1} + iy_{n+1} = \dfrac{3x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} + i\, \dfrac{3y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4}$

d'où $\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \dfrac{3x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} \\ y_{n+1} & = & \dfrac{3y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4} \end{array} \right.$ *(par unicité de la forme algébrique)*

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \dfrac{3x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} \\ y_{n+1} & = & \dfrac{3y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4} \end{array} \right.}$$

□

b) En déduire, en raisonnant par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8 \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 8 \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, d'après ***1.b)*** : $u_0 = OA_0 = 8$.
- D'autre part : $8 \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 = 8 \times 1 = 8$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$).

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}^2 & = & (OA_{n+1})^2 \\ & = & (x_{n+1} - x_O)^2 + (y_{n+1} - y_O)^2 \\ & = & x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \\ & = & \left(\dfrac{3x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4}\right)^2 \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{9x_n^2 + \cancel{6\sqrt{3}\,x_n}\,y_n + 3y_n^2}{16} + \dfrac{9y_n^2 - \cancel{6\sqrt{3}\,x_n}\,y_n + 3x_n^2}{16} \\ & = & \dfrac{12}{16}(x_n^2 + y_n^2) \ = \ \dfrac{3}{4}\,(x_n^2 + y_n^2) \end{array}$$

Ainsi : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3}{4}\,(x_n^2 + y_n^2)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\sqrt{x_n^2 + y_n^3}$

- Or :

$$u_n \ = \ \sqrt{(x_n - x_O)^2 + (y_n - x_O)^2} \ = \ \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,u_n \\ & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.}$$

□

c) Quelle est la monotonie de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite, si elle existe ? On justifiera toutes ses réponses.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n \ = \ 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \ = \ 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$$

Or : $8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n > 0$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 < 0$. D'où : $u_{n+1} - u_n < 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est (strictement) décroissante.}}$$

- La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Or : $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

□

3. ***a)*** Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, i$$

On admet qu'on peut alors en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, OA_{k+1}$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, d'après $(*)$: $z_{k+1} = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{4}\, z_k$. D'où :

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{4}{3 - i\sqrt{3}}\, z_{k+1} \\ &= \frac{4\,(3 + i\sqrt{3})}{(3 - i\sqrt{3})\,(3 + i\sqrt{3})}\, z_{k+1} \\ &= \frac{4\,(3 + i\sqrt{3})}{9 - 3i^2}\, z_{k+1} \\ &= \frac{4\,(3 + i\sqrt{3})}{12}\, z_{k+1} \\ &= \frac{3 + i\sqrt{3}}{3}\, z_{k+1} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{z_{k+1} - \frac{3+i\sqrt{3}}{3}\, z_{k+1}}{z_{k+1}} = \frac{\left(1 - \frac{3+i\sqrt{3}}{3}\right) \cancel{z_{k+1}}}{\cancel{z_{k+1}}} = -i\, \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in \mathbb{N},\ \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -i\, \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, i.}$$

□

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, …, A_n.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
\ell_n & = & A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, OA_{k+1}\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=1}^{n} OA_k & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k & \textit{(par définition de } u_k\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\right) & \textit{(d'après } \textbf{2.b)}\textit{)} \\
& = & \dfrac{8}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k & \\
& = & \dfrac{8}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, \dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} & \textit{(car } \dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 1\textit{)}
\end{array}$$

- Or, comme $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$.
- On en déduit que la suite (ℓ_n) est convergente de limite :

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\, \frac{1-0}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \;=\; 4\, \frac{2}{2-\sqrt{3}} \;=\; \frac{8}{2-\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\text{La suite } (\ell_n) \text{ est convergente de limite } \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}.}$$

□

Pour aller plus loin

Il s'agit dans cet exercice d'étudier :

- la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  - × ils sont de plus en plus proche de l'origine O,
  - × on pourra démontrer après le prochain chapitre sur les complexes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \widehat{A_0\,OA_n} = n\ \frac{\pi}{6}$$

- la ligne brisée reliant dans l'ordre A_0, A_1, …, A_n, plus précisément sa longueur.

En traçant un peu plus de points de la suite (A_n), on obtient le graphe suivant, qui permet de mieux se rendre compte du comportement asymptotique de (A_n) et (ℓ_n).