DS3 /87

Exercice 1 /39

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 2\,a_n \end{array} \right.$$

1. Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3.

- **1 pt : $a_2 = 1$ et $b_2 = 2$**
- **1 pt : $a_3 = 3$ et $b_3 = 2$**

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

- **1 pt : structure de rédaction de la récurrence**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

3. *a)* Donner M^2.

- **1 pt : $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**

b) Démontrer : $M^2 = M + 2\,I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

- **1 pt**

c) Démontrer alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = a_n\,M + b_n\,I$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**
  - × **1 pt : utilisation hypothèse de récurrence**
  - × **1 pt : utilisation qst précédente**
  - × **1 pt : utilisation définition a_{n+1} et b_{n+1}**

-1 : si récurrence mal rédigée

4. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On pose encore : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = A\,X_n$.

- **1 pt : quantification**
- **1 pt : calcul**

b) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, la matrice X_n en fonction de A^{n-1} et de X_1.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

-1 : si récurrence mal rédigée

c) Justifier que P est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On note P^{-1} cette matrice.

- **1 pt :** $PQ = I$

d) Vérifier que $P^{-1}\,A\,P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

- **1 pt :** $A = PDP^{-1}$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

-1 : si la récurrence est mal rédigée

f) **On admet**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^{n-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{3} \times \left(2^n + (-1)^{n-1}\right)$.

- **1 pt : quantification**
- **1 pt : cas** $n = 1$
- **2 pts : cas** $n \geqslant 2$
  - × **utilisation *4.b)***
  - × **calcul**

5. Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $2^{4k} - 1 \equiv 0 \ [5]$.

- **1 pt : quantification**
- **1 pt :** $2^4 = 16$ **donc** $2^4 \equiv 1 \ [5]$
- **1 pt : élévation à la puissance** $k^{\text{ème}}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 4.

a) Montrer que $3\,a_n$ est divisible par 5.

- **1 pt : comme** n **est un multiple de** 4**, alors il existe** $k \in \mathbb{N}$ **tel que :** $n = 4k$.
- **1 pt :** $3\,a_n = 2^{4k} - 1$
- **1 pt : conclusion avec la question précédente**

b) Écrire en **Python** une fonction `Test_Div` prenant en paramètre un entier `n` et renvoyant un message indiquant si l'entier $a_{\mathtt{n}}$ est divisible par 5.
On pourra utiliser la commande prédéfinie en ***Python*** *pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`*. Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie* 3 *: le reste dans la division euclidienne de* 11 *par* 4*.*

- **5 pts (dont 1 pt pour l'indentation)**

```python
def Test_Div(n) :
    a = (1/3) * (2**n + (-1)**(n-1))
    if a % 5 == 0 :
        return print("L'entier a_" + str(n) + " est divisible par 5")
    else :
        return print("L'entier a_" + str(n) + " n'est pas divisible par 5")
```

Exercice 2 /13

1. Démontrer : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

- **1 pt : quantification**
- **1 pt :** $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$
- **1 pt :** $\overline{z_1 \times z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$
- **1 pt :** $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$

2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

- **5 pts :** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **(dont 1 pt pour la justification de l'inversibilité)**

3. *a)* Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « tout réel est le cube d'un réel ». Cette assertion est-elle vraie ?

- **1 pt :** $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $y = x^3$
- **1 pt : vrai par surjectivité de** $x \mapsto x^3$

b) Écrire la négation de la proposition précédente. Cette assertion est-elle vraie ?

- **1 pt :** $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \neq x^3$
- **1 pt : faux car négation d'une assertion vraie**

Exercice 3 /35

Dans cette exercice, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On dit qu'un point M a pour affixe z s'il a pour coordonnées $\big(\mathrm{Re}\,(z)\,,\mathrm{Im}\,(z)\big)$. Par exemple, le point d'affixe $2-3i$ a pour coordonnées $(2,-3)$.
Soient $M=(x_M, y_M)$ et $N=(x_N, y_N)$ deux points du plan. On rappelle que la longueur MN s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$MN \;=\; \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} \;=\; \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\; z_n \qquad (*)$$

On note A_n le point d'affixe $z_n = x_n + iy_n$.

1. ***a)*** Calculer z_1, z_2 et z_3. On mettra les résultats sous forme algébrique.

- **1 pt :** $z_1 = 6 - 2i\sqrt{3}$
- **1 pt :** $z_2 = 3 - 3i\sqrt{3}$
- **1 pt :** $z_3 = -3i\sqrt{3}$

b) Calculer les longueurs OA_0, OA_1, OA_2 et OA_3.

- **1 pt :** $OA_0 = 8$
- **1 pt :** $OA_1 = 4\sqrt{3}$
- **1 pt :** $OA_2 = 6$
- **1 pt :** $OA_3 = 3\sqrt{3}$

c) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre. On donne par ailleurs : $\sqrt{3} \approx 1,7$.

- **1 pt : repère orthonormé correct**
- **4 pts : placer les points A_0, …, A_3 (avec la bonne échelle)**

2. On note (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = OA_n$.

a) En utilisant $(*)$, démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} \;=\; \frac{3\,x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} \;=\; \frac{3\,y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4}$$

- **1 pt : quantification**
- **2 pts :** $z_{n+1} = \dfrac{3x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} + i\;\dfrac{3y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4}$
- **1 pt : unicité de la forme algébrique**

b) En déduire, en raisonnant par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

- **1 pt : initialisation**
- **4 pts : hérédité**
  - × **2 pts :** $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\;\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$
  - × **1 pt :** $u_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$
  - × **1 pt :** $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\;u_n = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

-1 : si la récurrence est mal rédigée

c) Quelle est la monotonie de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite, si elle existe ?
On justifiera toutes ses réponses.

- **1 pt : (u_n) (strictement) décroissante**
  0 pt si absence de quantification
- **1 pt : (u_n) suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**
- **1 pt : $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$**

3. a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, i$$

On admet qu'on peut alors en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, OA_{k+1}$.

- **1 pt : quantification**
- **2 pts : $z_k = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{3}\, z_{k+1}$**
- **1 pt : $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = -i\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, i$**

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.

- **1 pt : quantification**
- **1 pt : $\ell_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=0}^{n-1} OA_{k+1}$**
- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : $\ell_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$**
- **1 pt : $\ell_n = 4\,\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ car $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$**
- **1 pt : (ℓ_n) est convergente de limite $\dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$**