DS3

Exercice 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres entiers définies par :

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} a_{n+1} & = & a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 2\,a_n \end{cases}$$

1. Calculer a_2, b_2, a_3 et b_3.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

3. ***a)*** Donner M^2.

b) Démontrer : $M^2 = M + 2\,I$, où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité d'ordre 3.

c) Démontrer alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = a_n\,M + b_n\,I$.

4. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On pose encore : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = A\,X_n$.

b) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, la matrice X_n en fonction de A^{n-1} et de X_1.

c) Justifier que P est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On note P^{-1} cette matrice.

d) Vérifier que $P^{-1}\,A\,P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

e) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

f) **On admet**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^{n-1} & \frac{1}{3} \times 2^{n-1} - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{3} \times \left(2^n + (-1)^{n-1}\right)$.

5. Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $2^{4k} - 1 \equiv 0\ [5]$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un multiple de 4.

a) Montrer que $3\,a_n$ est divisible par 5.

b) Écrire en **Python** une fonction `Test_Div` prenant en paramètre un entier `n` et renvoyant un message indiquant si l'entier $a_{\mathtt{n}}$ est divisible par 5.
On pourra utiliser la commande prédéfinie en ***Python*** *pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`*. Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie* 3 *: le reste dans la division euclidienne de* 11 *par* 4.

Exercice 2

1. Démontrer : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

3. ***a)*** Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « tout réel est le cube d'un réel ». Cette assertion est-elle vraie ?

b) Écrire la négation de la proposition précédente. Cette assertion est-elle vraie ?

Exercice 3

Dans cette exercice, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On dit qu'un point M a pour affixe z s'il a pour coordonnées $\big(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\big)$. Par exemple, le point d'affixe $2 - 3i$ a pour coordonnées $(2, -3)$.
Soient $M = (x_M, y_M)$ et $N = (x_N, y_N)$ deux points du plan. On rappelle que la longueur MN s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\, z_n \qquad (*)$$

On note A_n le point d'affixe $z_n = x_n + iy_n$.

1. ***a)*** Calculer z_1, z_2 et z_3. On mettra les résultats sous forme algébrique.

b) Calculer les longueurs OA_0, OA_1, OA_2 et OA_3.

c) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre. On donne par ailleurs : $\sqrt{3} \approx 1,7$.

2. On note (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = OA_n$.

a) En utilisant $(*)$, démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{3\,x_n + \sqrt{3}\,y_n}{4} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = \frac{3\,y_n - \sqrt{3}\,x_n}{4}$$

b) En déduire, en raisonnant par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c) Quelle est la monotonie de la suite (u_n) ? Quelle est sa limite, si elle existe ?
On justifiera toutes ses réponses.

3. ***a)*** Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, i$$

On admet qu'on peut alors en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, OA_{k+1}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, …, A_n.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (ℓ_n) est convergente et calculer sa limite.