DS1 /77

Exercice 1 /32

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A

*Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.*

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que p est un nombre premier si :

- $p \geqslant 2$,
- les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p.

Sans justification, donner deux nombres premiers x et y tels que : $40 = x + y$.

- **1 pt :** $40 = 23 + 17$

2. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés. Autrement dit, on s'intéresse à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.

a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.

- **1 pt : quantification x et y**
- **1 pt : bonne disjonction de cas**
- **2 pts : détails des différents cas (peu importe la méthode utilisée : division euclidienne ou congruence)**

b) En utilisant le fait que $40 = 2^3 \times 5$, déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$, avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

- **1 pt : quantification x et y**
- **6 pts : analyse :**
  - × **1 pt : Supposons** $x^2 - y^2 = 40$
  - × **1 pt :** $40 = (x - y)(x + y)$
  - × **1 pt : comme** $y \geqslant 0$**, alors** $x - y \leqslant x + y$**.** 4 **cas se présentent alors**
  - × **1 pt : dans les cas** $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 40 \end{array}\right.$ **et** $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 5 \\ x & + & y & = & 8 \end{array}\right.$**, les entiers** $x - y$ **et** $x + y$ **n'ont pas la même parité, donc le système n'admet pas de solution**
  - × **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 11 \\ y & = & 9 \end{array}\right.$
  - × **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 4 \\ x & + & y & = & 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 7 \\ y & = & 3 \end{array}\right.$
- **2 pts : synthèse (on vérifie que les couples** $(11, 9)$ **et** $(7, 3)$ **sont bien solutions du problème posé).**

Partie B : sommes de cubes

*Les questions **3.** et **4.** sont indépendantes.*

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels. Par exemple :

$$\begin{aligned} 13 &= 4^3 + 7^3 + 4^3 - 9^3 - 2^3 \\ 13 &= -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3 \\ 13 &= 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes de cubes » à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ».
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en somme de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en somme de 4 cubes.

3. ***a)*** En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.

- **1 pt : d'après *1.*** $40 = 13 + 27 = 13 + 3^3$
- **1 pt : d'après l'énoncé** $40 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 + 3^3$

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$6\,n \;=\; (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$$

- **1 pt : quantification** n
- **1 pt :** $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
- **1 pt :** $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$
- **1 pt : fin du calcul**

c) En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes, différente de celle donnée en ***3.a)***.

- **1 pt : en appliquant la qst précédente à** $n = 8$**, on obtient** $48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$
- **1 pt :** $40 = 48 - 8 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 2^3$

4. Le nombre 40 est une somme de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$.
On veut savoir si 40 peut être décomposé en somme de 3 cubes.

a) Recopier et compléter en justifiant le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9					1				

- **2 pts : cas** $n \equiv 5\ [9]$ **ou** $n \equiv 8\ [9]$
- **2 pts : cas** $n \equiv 7\ [9]$
- **1 pt : tableau correctement complété**

Reste de la division euclidienne de n **par** 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 **par** 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b) On déduit du tableau précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^3 \equiv 0\ [9] \qquad \texttt{OU} \qquad n^3 \equiv 1\ [9] \qquad \texttt{OU} \qquad n^3 \equiv -1\ [9]$$

Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : supposons que** 40 **peut se décomposer en somme de** 3 **cubes**
  Alors il existe $(n, p, q) \in \mathbb{Z}^3$ **tel que :** $40 = n^3 + p^3 + q^3$**.**
- **1 pt :** $40 \equiv 4\ [9]$
- **2 pts : explications** $n^3 + p^3 + q^3 \not\equiv 4\ [9]$

Exercice 2 /11

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Démontrer :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ [p] \\ c \equiv d\ [p] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a \times c \equiv b \times d\ [p]$$

- **1 pt : structure de démonstration (Supposons :** $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\ [p] \\ c \equiv d\ [p] \end{array}\right.$ **)**
- **1 pt :** $p \mid (a - b)$ **et** $p \mid (c - d)$
- **1 pt :** $p \mid \big(c\,(a - b) + b\,(c - d)\big)$ **d'où** $p \mid (ac - bd)$
- **1 pt : conclusion**

2. a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{3 - 5\,i}{i + 1}$.

- **2 pts :** $\dfrac{3 - 5\,i}{i + 1} = -1 - 4\,i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + 2\,i)\,z + 5\,i - 1 = 3 - 5\,i\,z$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

- **1 pt : quantification** z
- **1 pt :** $(1 + 2i)\,z + 5i - 1 = 3 - 5i\,z \;\Leftrightarrow\; z = \dfrac{4 - 5i}{1 + 7i}$
- **2 pts :** $\dfrac{4 - 5i}{1 + 7i} = -\dfrac{31}{50} - \dfrac{33}{50}\ i$
- **1 pt : l'ensemble des solutions de l'équation est** $\{-\frac{31}{50} - i\ \frac{33}{50}\}$

Exercice 3 /34

Partie A

Dans l'algorithme ci-contre, les variables a, b et c représentent des entiers naturels.

Algorithme

```
c ← 0
Tant que a ⩾ b, faire :
    c ← c + 1
    a ← a − b
Fin Tant que
```

1. On prend $a = 13$ et $b = 4$.
Donner les valeurs de a et c obtenues à la sortie de cet algorithme en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

- **1 pt : après le** 1^{er} **tour de boucle,** $c = 1$ **et** $a = 9$
- **1 pt : après le** $2^{\text{ème}}$ **tour de boucle,** $c = 2$ **et** $a = 5$
- **1 pt : après le** $3^{\text{ème}}$ **tour de boucle,** $c = 3$ **et** $a = 1$
- **1 pt : la boucle s'arrête avant la** $4^{\text{ème}}$ **boucle car** $a = 1 \not\geqslant 4 = b$

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

- **2 pts : cet algorithme permet d'obtenir dans la variable** c **le quotient (1 pt), et dans la variable** a **le reste (1 pt) de la division euclidienne de** a **par** b
- **2 pts : explications**

3. Coder en **Python** cet algorithme.
On considèrera que les entiers a et b ont été au préalable rentrés par l'utilisateur.

- **4 pts :**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **1 pt : structure itérative**
  - × **2 pts : mises à jour de** c **et** a

```python
c = 0
while a >= b :
    c = c + 1
    a = a - b
```

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- **Étape 1** : à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
- **Étape 2** : on calcule le reste de la division euclidienne de $9\,m + 5$ par 26 et on le note p.
- **Étape 3** : au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

4. Coder la lettre U en expliquant votre démarche.

- **1 pt : Étape 1. À la lettre U, on associe le nombre $m = 20$**
- **1 pt : Étape 2. L'entier $p = 3$ est le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 car :**

$$\begin{cases} 9m + 5 = 185 = 26 \times 7 + 3 \\ 0 \leqslant 3 < 26 \end{cases}$$

- **1 pt : Étape 3. Au nombre $p = 3$, on associe la lettre D**

5. Écrire en **Python**, à l'aide de l'algorithme fourni par l'énoncé, une fonction `Codage` prenant en paramètre un entier `m` et renvoyant l'entier `p` défini par l'algorithme ci-dessus.
*On pourra utiliser la commande prédéfinie en **Python** pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`. *Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie 3 : le reste dans la division euclidienne de 11 par 4.*

- **3 pts : 1 pt par ligne**

```python
def Codage(m) :
    p = (9 * m + 5) % 26
    return p
```

Partie C

6. Déterminer un inverse de 9 modulo 26.

- **1 pt : $9 \times 3 \equiv 1\ [26]$ donc 3 est un inverse de 9 modulo 26**

7. Démontrer alors l'équivalence :

$$9\,m + 5 \equiv p\ [26] \qquad \Leftrightarrow \qquad m \equiv 3\,p - 15\ [26]$$

- **1 pt : raisonnement par double implication**
- **4 pts : $(\Rightarrow)$**
  - × **1 pt : supposons : $9m + 5 \equiv p\ [26]$**
  - × **1 pt : $9m + 5 \equiv p\ [26]$ donc $3 \times 9m \equiv 3p - 15\ [26]$**
  - × **1 pt : $3 \times 9 \equiv 1\ [26]$ donc $3 \times 9m \equiv m\ [26]$**
  - × **1 pt : $m \equiv 3 \times 9m\ [26]$ d'où $m \equiv 3p - 15\ [26]$**
- **4 pts : $(\Leftarrow)$**
  - × **1 pt : supposons : $m \equiv 3p - 15\ [26]$**
  - × **1 pt : $m \equiv 3p - 15\ [26]$ donc $9m \equiv 9 \times 3p - 135\ [26]$**
  - × **1 pt : $135 \equiv 5\ [26]$ car $135 - 5 = 130 = 26 \times 5$**
  - × **1 pt : $9 \times 3 \equiv 1\ [26]$ donc $9 \times 3p \equiv p\ [26]$**

8. Décoder alors la lettre B.

- **1 pt : la lettre B est chiffrée par $p = 1$**
- **1 pt : on cherche $m \in [\![0, 25]\!]$ tel que : $9m + 5 \equiv p\ [26]$**
- **1 pt : d'après la question précédente $9m + 5 \equiv p\ [26] \ \Leftrightarrow\ m \equiv -12\ [26]$**
- **1 pt : $-12 \equiv 14\ [26]$**
- **1 pt : $m \equiv 14\ [26]$ donc $m = 14$ car $m \in [\![0, 25]\!]$**
- **1 pt : la lettre B est décodée en la lettre O**