DS1

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A

*Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.*

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que p est un nombre premier si :

- $p \geqslant 2$,
- les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p.

Sans justification, donner deux nombres premiers x et y tels que : $40 = x + y$.

2. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés. Autrement dit, on s'intéresse à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.

a) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.

b) En utilisant le fait que $40 = 2^3 \times 5$, déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$, avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Partie B : sommes de cubes

*Les questions **3.** et **4.** sont indépendantes.*

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels. Par exemple :

$$\begin{aligned} 13 &= 4^3 + 7^3 + 4^3 - 9^3 - 2^3 \\ 13 &= -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3 \\ 13 &= 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes de cubes » à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ».
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en somme de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en somme de 4 cubes.

3. ***a)*** En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$6\,n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$$

c) En déduire une décomposition de 48 en somme de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en somme de 5 cubes, différente de celle donnée en ***3.a)***.

4. Le nombre 40 est une somme de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$.
On veut savoir si 40 peut être décomposé en somme de 3 cubes.

a) Recopier et compléter en justifiant le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9					1				

b) On déduit du tableau précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^3 \equiv 0\ [9] \qquad \texttt{OU} \qquad n^3 \equiv 1\ [9] \qquad \texttt{OU} \qquad n^3 \equiv -1\ [9]$$

Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

Exercice 2

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Démontrer :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\ [p] \\ c \equiv d\ [p] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a \times c \equiv b \times d\ [p]$$

2. ***a)*** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{3 - 5\,i}{i + 1}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + 2\,i)\,z + 5\,i - 1 = 3 - 5\,i\,z$. On donnera le résultat sous forme algébrique.

Exercice 3

Partie A

Dans l'algorithme ci-contre, les variables a, b et c représentent des entiers naturels.

Algorithme

```
c ← 0
Tant que a ⩾ b, faire :
    c ← c + 1
    a ← a − b
Fin Tant que
```

1. On prend $a = 13$ et $b = 4$.
Donner les valeurs de a et c obtenues à la sortie de cet algorithme en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

3. Coder en **Python** cet algorithme.
On considèrera que les entiers a et b ont été au préalable rentrés par l'utilisateur.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- **Étape 1** : à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
- **Étape 2** : on calcule le reste de la division euclidienne de $9\,m+5$ par 26 et on le note p.
- **Étape 3** : au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

4. Coder la lettre U en expliquant votre démarche.

5. Écrire en **Python**, à l'aide de l'algorithme fourni par l'énoncé, une fonction `Codage` prenant en paramètre un entier `m` et renvoyant l'entier `p` défini par l'algorithme ci-dessus.
*On pourra utiliser la commande prédéfinie en **Python** pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`. *Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie* 3 *: le reste dans la division euclidienne de* 11 *par* 4.

Partie C

6. Déterminer un inverse de 9 modulo 26.

7. Démontrer alors l'équivalence :

$$9\,m+5 \equiv p\ [26] \qquad \Leftrightarrow \qquad m \equiv 3\,p-15\ [26]$$

8. Décoder alors la lettre B.