DS3

Exercice 1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.

Démonstration.
Pour cette matrice A, en suivant les notations de l'énoncé, on obtient :

$$a = 6, \quad b = 5, \quad c = -5 \quad \text{et} \quad d = -4$$

On calcule alors :

$$ad - bc \ = \ 6 \times (-4) - 5 \times (-5) \ = \ -24 + 25 \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A \in S.}$$

□

2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.

Démonstration.
Soit $(a, d) \in \mathbb{Z}^2$. On note A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}
A \in S \quad & \Leftrightarrow \quad ad - 2 \times 3 = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad ad - 6 = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad ad = 7 \\
& \Leftrightarrow \quad a \mid 7, \quad d \mid 7 \quad \text{et} \quad ad = 7 \qquad\qquad \textit{(car } (a,d) \in \mathbb{Z}^2\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad (a, d) \in \{-7, -1, 1, 7\}^2 \quad \text{et} \quad ad = 7 \\
& \Leftrightarrow \quad (a, d) \in \{(-7, -1),\ (-1, -7),\ (1, 7),\ (7, 1)\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les quatre matrices de la forme citée appartenant à } S \text{ sont :} \\ \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.\end{array}}$$

Commentaire

- Notons que le raisonnement par équivalence employé ici est indispensable. C'est d'ailleurs toujours la méthode de raisonnement à employer pour déterminer l'ensemble des solutions d'une équation (ou d'un système d'équations). On démontre ainsi :

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  Autrement dit :

$$\left\{ A \in S \mid \exists (a,d) \in \mathbb{Z}^2,\ A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix} \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Remarquons également la différence entre les ensembles apparaissant dans la démonstration de cette question.
  - × L'ensemble $\{-7,-1,1,7\}^2$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On peut déterminer son cardinal :

$$\begin{aligned} \text{Card}\left(\{-7,-1,1,7\}^2\right) &= \text{Card}\left(\{-7,-1,1,7\} \times \{-7,-1,1,7\}\right) \\ &= \text{Card}\left(\{-7,-1,1,7\}\right) \times \text{Card}\left(\{-7,-1,1,7\}\right) \\ &= 4 \times 4 \ = \ 16 \end{aligned}$$

  - × L'ensemble $\{(-7,-1),\ (-1,-7),\ (1,7),\ (7,1)\}$ est également un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Mais l'égalité suivante est fausse :

$$\{-7,-1,1,7\}^2 \ \cancel{=} \ \{(-7,-1),\ (-1,-7),\ (1,7),\ (7,1)\}$$

    On peut le constater rapidement en déterminant le cardinal de ce nouvel ensemble. Ce dernier contient exactement 4 couple (4 éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^2$). Ainsi :

$$\text{Card}\left(\{(-7,-1),\ (-1,-7),\ (1,7),\ (7,1)\}\right) \ = \ 4$$

□

3. a) Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.

Démonstration.

- Énonçons d'abord ce théorème.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pour tout } (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3. \\ \left.\begin{array}{l} a \mid b\,c \\ a \wedge b \ = \ 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a \mid c. \end{array}}$$

- Démontrons maintenant ce théorème.
  Supposons : $a \mid b\,c$ et $a \wedge b = 1$.
  - × Comme $a \wedge b = 1$, on obtient :

$$c \ = \ c\,(a \wedge b) \ = \ ac \wedge bc$$

  - × De plus :
    - par hypothèse : $a \mid b\,c$,
    - on a toujours : $a \mid a\,c$.

    On en déduit : $a \mid ac \wedge bc$. D'où : $a \mid c$.

□

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1, 2)$ est une solution particulière de cette équation.

Démonstration.

- Tout d'abord : $2 \wedge 5 = 1$. Comme $1 \mid 1$, l'équation (E) admet bien des solutions.
- Vérifions que le couple $(1, 2)$ est une solution particulière de (E).

$$5 \times 1 - 2 \times 2 \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Le couple } (1,2) \text{ est donc bien une solution particulière de } (E).}$$

- On procède par analyse-synthèse.
  - × Analyse.

    Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons : $5x - 2y = 1$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 5\,x & - & 2\,y & = & 1 \\ 5 \times 1 & - & 2 \times 2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{donc} & 5(x-1) - 2(y-2) & = & 0 \\ \text{d'où} & 5(x-1) & = & 2(y-2) \end{array}$$

    Or $5 \mid 5(x - 1)$. Ainsi :

    ▸ $5 \mid 2(y - 2)$,

    ▸ $2 \wedge 5 = 1$.

    Par théorème de Gauss : $5 \mid (y - 2)$. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $y - 2 = 5k$ *i.e.* $y = 5k + 2$. Alors :

$$5x - 2(5k + 2) = 1$$

$$\begin{array}{lc} \text{donc} & 5\,x = 2(5k+2) + 1 = 10k + 5 \\ \text{d'où} & \cancel{5}\,x = \cancel{5}\,(2k+1) \\ \text{ainsi} & x = 2k + 1 \end{array}$$

  - × Synthèse.

    Soit $k \in \mathbb{Z}$. Vérifions que le couple $\big(2k + 1, 5k + 2\big)$ est solution de l'équation $5x - 2y = 1$.

$$5 \times (2k+1) - 2 \times (5k+2) \ = \ \cancel{10k} + 5 - \cancel{10k} - 4 \ = \ 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, l'ensemble des solutions } \mathcal{S} \text{ de l'équation } (E) \text{ est :} \\ \{\big(2k+1, 5k+2\big) \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{array}}$$

Commentaire

- La résolution **complète** d'une équation diophantienne fait partie du cours. Il est normal que l'énoncé de fournisse aucune aide sur la méthode de résolution d'une telle équation.
- Rappelons que si aucune solution particulière ne saute aux yeux, on peut toujours en déterminer une à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

□

c) En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Démonstration.
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On note : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$A \in S \ \Leftrightarrow \ 5a - 2b = 1 \ \Leftrightarrow \ (a, b) \text{ est solution de } (E) \ \Leftrightarrow \ (a, b) \in \mathcal{S}$$

On en déduit que l'ensemble des matrices de la forme demandée qui appartiennent à S sont :

$$\left\{\begin{pmatrix} 2k+1 & 5k+2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

□

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que : $ad - bc = 1$.

4. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $a \times d + b \times (-c) = 1$.

Ainsi, par théorème de Bézout : $a \wedge b = 1$.

□

5. On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit AB. On admet : $AB = BA$.

Démonstration.
On effectue le produit matriciel demandé :

$$A \times B \ = \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

Or, d'après l'énoncé : $ad - bc = 1$.

Ainsi : $A \times B \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ I_2$.

□

b) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$AB \ = \ BA \ = \ I_2$$

On en déduit que la matrice A est inversible et : $A^{-1} = B$.

□

c) Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

Démonstration.
On rappelle, d'après la question précédente : $A^{-1} = B$.
Or : $d \times a - (-b) \times (-c) = 1$.

On en déduit : $A^{-1} \in S$.

□

6. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $x = d\,x' - b\,y'$. On admet de même : $y = a\,y' - c\,x'$.

Démonstration.
Par définition de x' et y' : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On en déduit, d'après la question ***5.b)*** :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx' - by' \\ ay' - cx' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{En particulier : } x = dx' - by'.}$$

□

b) On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Démontrer : $D = D'$.

Démonstration.

- Comme $D = x \wedge y$, alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $ux + vy = D$. Ainsi :

$$\begin{aligned} D &= ux + vy \\ &= u\,(dx' - by') + v\,(ay' - cx') \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= (ud - cv)\,x' + (va - ub)\,y' \end{aligned}$$

  En notant $w = ud - cv \in \mathbb{Z}$ et $t = va - ub \in \mathbb{Z}$, on obtient : $wx' + ty' = D$.

$$\boxed{\text{Or : } D' = x' \wedge y'. \text{ On en déduit : } D' \mid D.}$$

- Comme $D' = x' \wedge y'$, alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $ux' + vy' = D'$. Ainsi :

$$\begin{aligned} D' &= ux' + vy' \\ &= u\,(ax + by) + v\,(cx + dy) \quad \textit{(par définition de } x' \textit{ et } y'\textit{)} \\ &= (ua + vc)\,x + (ub + vd)\,y \end{aligned}$$

  En notant $w = ua + vc \in \mathbb{Z}$ et $t = ub + vd \in \mathbb{Z}$, on obtient : $wx + ty = D'$.

$$\boxed{\text{Or : } D = x \wedge y. \text{ On en déduit : } D \mid D'.}$$

- On déduit des 2 points précédents : $|D| = |D'|$. Or, un PGCD est toujours positif.

$$\boxed{\text{On en conclut : } D = D'.}$$

□

7. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_{n+1} & = & 2\,x_n & + & 3\,y_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 2\,y_n \end{array}\right.$.
En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

Démonstration.

- Commençons par écrire le système de l'énoncé sous forme matricielle.
  On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n + 3y_n \\ x_n + 2y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque : $A \in S$. En effet : $2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$. On peut donc appliquer la question ***6***. On obtient :
  $$x_{n+1} \wedge y_{n+1} = x_n \wedge y_n$$
  Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \wedge y_n = x_0 \wedge y_0$.
- On détermine alors $x_0 \wedge y_0$ grâce à l'algorithme d'Euclide.
  $$2019 = 3 \times 673 + 0$$
  Ainsi : $2019 \wedge 673 = 673$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \wedge y_n = 673 = y_0.}$$

Commentaire

Le détail de la récurrence de cette démonstration n'était pas indispensable puisqu'elle n'était pas l'objet de la question (seulement l'une de ces étapes). Détaillons la cependant dans cette remarque.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $x_n \wedge y_n = x_0 \wedge y_0$.

- **Initialisation** : $x_0 \wedge y_0 = x_0 \wedge y_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $x_{n+1} \wedge y_{n+1} = x_0 \wedge y_0$).
  $$\begin{array}{rcll} x_{n+1} \wedge y_{n+1} & = & x_n \wedge y_n & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & = & x_0 \wedge y_0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{array}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \wedge y_n = x_0 \wedge y_0$. □

Exercice 2

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n} \end{array}\right.$$

1. a) Dans cette question, on suppose : $z_0 = i$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4.

Démonstration.

- Par définition de la suite (z_n) :

$$z_1 \ = \ 1 - \frac{1}{z_0} \ = \ 1 - \frac{1}{i} \ = \ 1 - \frac{i}{-1} \ = \ 1 + i$$

$$\boxed{z_0 = 1 + i}$$

- Ensuite :

$$z_2 \ = \ 1 - \frac{1}{z_1} \ = \ 1 - \frac{1}{1+i} \ = \ 1 - \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \ = \ 1 - \frac{1-i}{1^2+1^2} \ = \ 1 - \frac{1-i}{2} \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i}$$

- De la même manière :

$$z_3 \ = \ 1 - \frac{1}{z_2} \ = \ 1 - \frac{1}{\frac{1+i}{2}} \ = \ 1 - \frac{2}{1+i} \ = \ 1 - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \ = \ 1 - \frac{\cancel{2}(1-i)}{\cancel{2}} \ = \ \cancel{1} - (\cancel{1} - i) \ = \ i$$

$$\boxed{z_3 = i}$$

- Enfin, avec le même calcul que dans le premier point :

$$z_4 \ = \ 1 - \frac{1}{z_3} \ = \ 1 - \frac{1}{i} \ = \ 1 + i$$

$$\boxed{z_4 = 1 + i}$$

□

b) Que constatez-vous ?

Démonstration.
Il semble que la suite (z_n) est périodique de période 3. Autrement dit, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} z_{3p} &= i \ = \ z_0 \\ z_{3p+1} &= 1 + i \ = \ z_1 \\ z_{3p+2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i \ = \ z_2 \end{aligned}$$

□

2. On souhaite valider la conjecture faite à la question ***1.b)***.

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+3} = z_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
z_{n+3} &= 1 - \frac{1}{z_{n+2}} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_{n+1}}} && \textit{(toujours par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= 1 - \frac{z_{n+1}}{z_{n+1} - 1} \\
&= 1 - \frac{1 - \frac{1}{z_n}}{\cancel{1} - \frac{1}{z_n} - \cancel{1}} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= \cancel{1} + (z_n - \cancel{1}) \ = \ z_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+3} = z_n}$$

Commentaire

On pouvait également procéder par récurrence (même si ce n'est pas le réflexe à avoir pour ce type de question mais plutôt pour la question suivante).
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : z_{n+3} = z_n$.

- **Initialisation** :

$$\begin{aligned}
z_3 &= 1 - \frac{1}{z_2} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_1}} && \textit{(toujours par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= 1 - \frac{z_1}{z_1 - 1} \\
&= 1 - \frac{1 - \frac{1}{z_0}}{\cancel{1} - \frac{1}{z_0} - \cancel{1}} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= \cancel{1} + (z_0 - \cancel{1}) \ = \ z_0
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $z_{n+4} = z_{n+1}$).

$$\begin{aligned}
z_{n+4} &= 1 - \frac{1}{z_{n+3}} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\
&= 1 - \frac{1}{z_n} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= z_{n+1} && \textit{(par définition de la suite } (z_n)\textit{)}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+3} = z_n$.

□

b) Démontrer alors : $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$.

Démonstration.
On définit la suite (w_p) suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad w_p = z_{3p}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$w_{p+1} \; = \; z_{3(p+1)} \; = \; z_{3p+3} \; = \; z_{3p} \; = \; w_p$$

  On en déduit que la suite $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante. Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N}$, $w_p = w_0$.
- Or : $w_0 = z_{3\times 0} = z_0$. D'où, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $z_{3p} = w_p = w_0 = z_0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall p \in \mathbb{N},\ z_{3p} = z_0.}$$

Commentaire

On pouvait également raisonner par récurrence dans cette question. Cela était même naturel au vu de la question précédente. On a cependant privilégié l'utilisation d'un résultat de cours simple sur les suites pour conclure plus élégamment et efficacement.
Démontrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ où $\mathcal{P}(p)$: $z_{3p} = z_0$.

- **Initialisation** :

$$z_{3\times 0} \; = \; z_0$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* $z_{3(p+1)} = z_0$).

$$\begin{aligned} z_{3(p+1)} &= z_{3p+3} \\ &= z_{3p} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= z_0 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(p+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$.

□

c) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les valeurs de z_{3p+1} et z_{3p+2} respectivement en fonction de z_1 et z_2.

Démonstration.
- Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z_{3p+1} &= 1 - \frac{1}{z_{3p}} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\ &= 1 - \frac{1}{z_0} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= z_1 && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ z_{3p+1} = z_1}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$. De même :

$$\begin{aligned} z_{3p+2} &= 1 - \frac{1}{z_{3p+1}} && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\ &= 1 - \frac{1}{z_1} && \textit{(d'après le point précédent)} \\ &= z_2 && \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ z_{3p+2} = z_2}$$

□

3. Application : déterminer z_{2018} dans le cas où : $z_0 = i$.

Démonstration.

- Il faut d'abord déterminer le reste de la division euclidienne de 2018 par 3 pour pouvoir utiliser la question précédente.

$$2018 = 3 \times 672 + 2 \qquad (\text{et } 0 \leqslant 2 < 3)$$

- Ainsi, d'après la question précédente (avec $p = 672$), on obtient :

$$z_{2018} = z_{3\times 672+2} = z_2$$

Or, d'après la question ***1.a)***, si $z_0 = i$, alors : $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } z_{2018} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i.}$$

□

4. Existe-t-il des valeurs de z_0 pour lesquelles : $z_0 = z_1$? Exprimer alors z_2 en fonction de z_0.
Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Démonstration.

- Commençons par déterminer les valeurs de z_0 telles que : $z_0 = z_1$. Par définition de la suite (z_n) :

$$\begin{aligned} z_0 = z_1 &\Leftrightarrow z_0 = 1 - \frac{1}{z_0} \\ &\Leftrightarrow z_0^2 = z_0 - 1 && \textit{(car } z_0 \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \end{aligned}$$

On note Δ le discriminant du polynôme : $P(X) = X^2 - X + 1$. Alors :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

On en déduit que l'équation $z_0^2 - z_0 + 1 = 0$ admet exactement 2 solutions complexes :

$$\alpha = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } z_0 = z_1 \text{ pour exactement 2 valeurs de } z_0 : \alpha = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.}$$

- Supposons : $z_0 = z_1$. Alors :

$$z_2 \;=\; 1 - \frac{1}{z_1} \;=\; 1 - \frac{1}{z_0} \;=\; z_1 \;=\; z_0$$

Si $z_0 = z_1$, alors : $z_2 = z_1 = z_0$.

Supposons : $z_0 = z_1$. Par récurrence immédiate, la suite (z_n) est constante.

Commentaire

- Une nouvelle fois, comme la récurrence n'est pas l'objet de la question, on se permet simplement d'écrire « par récurrence immédiate ». Détaillons la néanmoins ci-dessous.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : z_{n+1} = z_n$.
  - **Initialisation** :
    Par hypothèse dans cette question : $z_1 = z_0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $z_{n+2} = z_{n+1}$).

$$\begin{array}{rcll} z_{n+2} & = & 1 - \dfrac{1}{z_{n+1}} & \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{z_n} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & z_{n+1} & \textit{(par définition de } (z_n)\textit{)} \end{array}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n$. Ainsi, la suite (z_n) est constante.
- Notons qu'on pouvait également démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : z_n = z_0$.

□

Exercice 3

Partie A

Pour tout entier naturel n, on définit les entiers $a_n = 6 \times 5^n - 2$ et $b_n = 3 \times 5^n + 1$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, chacun des entiers a_n et b_n est congru à 0 modulo 4.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{lrcll} & 5 & \equiv & 1 & [4] \\ \text{donc} & 5^n & \equiv & 1^n & [4] \\ \text{d'où} & 6 \times 5^n & \equiv & 6 \times 1 & [4] \\ \text{ainsi} & 6 \times 5^n & \equiv & 2 & [4] \\ \text{enfin} & 6 \times 5^n - 2 & \equiv & 0 & [4] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } a_n \equiv 0 \ [4].}$$

- Ensuite :

$$\begin{array}{lrcll} & 5^n & \equiv & 1 & [4] \\ \text{donc} & 3 \times 5^n & \equiv & 3 \times 1 & [4] \\ \text{d'où} & 3 \times 5^n + 1 & \equiv & 4 & [4] \\ \text{ainsi} & b_n & \equiv & 0 & [4] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } b_n \equiv 0 \ [4].}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, calculer $2\,b_n - a_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} 2\,b_n - a_n & = & 2 \times (3 \times 5^n + 1) - (6 \times 5^n - 2) \\ & = & \cancel{6 \times 5^n} + 2 - \cancel{6 \times 5^n} + 2 \\ & = & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2\,b_n - a_n = 4}$$

□

c) Déterminer le PGCD de a_n et b_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons : $a_n \wedge b_n = 4$ par double divisibilité.

- D'après la question précédente : $2\,b_n + (-1)\,a_n = 4$. On en déduit : $a_n \wedge b_n \mid 4$.
- D'après la question ***1.a)*** :

$$4 \mid a_n \qquad \text{et} \qquad 4 \mid b_n$$

  Par définition du PGCD, on en déduit : $4 \mid a_n \wedge b_n$.

Ainsi : $|a_n \wedge b_n| = |4| = 4$.

$$\boxed{\text{Or un PGCD est positif. On en déduit : } a_n \wedge b_n = 4.}$$

□

2. ***a)*** Démontrer : $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1$ [7].

Démonstration.

- Par définition de la suite (b_n) : $b_{2020} = 3 \times 5^{2020} + 1$.
- Or :

$$\begin{array}{lccll} & 5 & \equiv & -2 & [7] \\ \text{donc} & 5^{2020} & \equiv & (-2)^{2020} & [7] \\ \text{d'où} & 5^{2020} & \equiv & (-1)^{2020} \times 2^{2020} & [7] \\ \text{ainsi} & 5^{2020} & \equiv & 2^{2020} & [7] \\ \text{enfin} & 3 \times 5^{2020} + 1 & \equiv 3 \times 2^{2020} + 1 & [7] & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1 \ [7].}$$

□

b) En remarquant que $2020 = 3 \times 673 + 1$, montrer que b_{2020} est divisible par 7.

Démonstration.

- Démontrons : $3 \times 2^{2020} + 1 \equiv 0$ [7].

$$\begin{array}{lrcll} & 2^3 & \equiv & 1 & [7] \\ \text{donc} & 2^{3\times 673} = (2^3)^{673} & \equiv & 1^{673} & [7] \\ \text{d'où} & 2^{3\times 673+1} = 2 \times 2^{3\times 673} & \equiv & 2 \times 1 & [7] \\ \text{ainsi} & 2^{2020} & \equiv & 2 & [7] \quad \textit{(d'après l'indication de l'énoncé)} \\ \text{enfin} & 3 \times 2^{2020} + 1 & \equiv & 3 \times 2 + 1 & [7] \end{array}$$

  On obtient : $3 \times 2^{2020} + 1 \equiv 0$ [7].
- Or, d'après la question précédente : $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1$ [7]. Par transitivité des congruences, on en déduit : $b_{2020} \equiv 0$ [7].

$$\boxed{\text{Finalement : } 7 \mid b_{2020}.}$$

□

c) L'entier a_{2020} est-il divisible par 7 ? Justifier la réponse.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde pour démontrer que a_{2020} n'est pas divisible par 7.
Supposons : $7 \mid a_{2020}$.

- Alors :
  × $7 \mid a_{2020}$
  × $4 \mid a_{2020}$ d'après ***1.a)***
  × $4 \wedge 7 = 1$

  Par corollaire du théorème de Gauss : $28 \mid a_{2020}$.

- De même :
  - × $7 \mid b_{2020}$ d'après la question précédente
  - × $4 \mid b_{2020}$ d'après ***1.a)***
  - × $4 \wedge 7 = 1$

  Par corollaire du théorème de Gauss : $28 \mid b_{2020}$.

On en déduit : $28 \mid a_{2020} \wedge b_{2020}$.
Absurde ! (car d'après ***1.c)*** : $a_{2020} \wedge b_{2020} = 4$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a_{2020} \text{ n'est pas divisible par } 7.}$$ □

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

× $u_0 = v_0 = 1$

× $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 3\,u_n & + & 4\,v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & 3\,v_n \end{array} \right.$

Pour un entier naturel N donné, on souhaite calculer les termes de rang N des suites (u_n) et (v_n) et on se demande si l'algorithme ci-contre permet ce calcul.

Algorithme

```
U ← 1
V ← 1
K ← 0
Tant que K < N
    U ← 3U + 4V
    V ← U + 3V
    K ← K + 1
Fin Tant que
```

3. On fait fonctionner l'algorithme avec $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs successivement affectées aux variables U, V et K.

U	V	K
1	1	0
7	10	1

Démonstration.
Détaillons les valeurs prises par les variables K, U et V à chaque tour de boucle.

- Avant le 1er tour de boucle :

  `U` contient 1, `V` contient 1 et `K` contient 0

  lors du 1er tour de boucle :

  $U \leftarrow 3\,U + 4\,V$ (`U` contient alors $3 \times 1 + 4 \times 1 = 7$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `U` et `V`)

  $V \leftarrow U + 3\,V$ (`V` contient alors $7 + 3 \times 1 = 10$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `U` et `V`)

  $K \leftarrow K + 1$ (`K` contient alors $0 + 1 = 1$, en prenant en compte la dernière valeur en date de `K`)

- Avant le $2^{\text{ème}}$ tour de boucle, d'après ce qui précède :

  `U` contient 7, `V` contient 10 et `K` contient 1

  lors du $2^{\text{ème}}$ tour de boucle :

  $U \leftarrow 3\,U + 4\,V$ (`U` contient alors $3 \times 7 + 4 \times 10 = 61$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `U` et `V`)

  $V \leftarrow U + 3\,V$ (`V` contient alors $61 + 3 \times 10 = 91$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `U` et `V`)

  $K \leftarrow K + 1$ (`K` contient alors $1 + 1 = 2$, en prenant en compte la dernière valeur en date de `K`)

On complète donc le tableau de l'énoncé de la façon suivante :

U	V	K
1	1	0
7	10	1
61	91	2

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le tableau démontre la bonne compréhension de l'algorithme proposé et permet d'obtenir tous les points alloués à cette questions. On procèdera de même dans les autres questions d'algorithmie. □

4. L'algorithme permet-il effectivement de calculer u_N et v_N pour une valeur de N donnée ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de cet algorithme afin que les variables U et V contiennent bien les valeurs de u_N et v_N à la fin de son exécution.

Démonstration.

- Calculons u_1 et v_1. D'après l'énoncé :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} u_1 & = & 2\,u_0 + 4\,v_0 & = & 7 \\ v_1 & = & u_0 + 3\,v_0 & = & 4 \neq 10 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour une valeur de } N \text{ donnée, l'algorithme ne renvoie pas les valeurs de } u_N \text{ et } v_N.}$$

- On propose alors le script suivant.

```
U ← 1
V ← 1
K ← 0
Tant que K < N
    Aux ← U
    U ← 3 Aux +4 V
    V ← Aux +3 V
    K ← K + 1
Fin Tant que
```

Détaillons les éléments de ce script.

× **Début du programme**

On commence par initialiser les variables `U`, `V` et `K`.

- la variable `U` est initialisée à u_0,

  1 $U \leftarrow 1$

- la variable `V` est initialisée à v_0,

  2 $V \leftarrow 1$

- la variable `K` est initialisée à 0 (la variable `K` est un compteur, ici il correspond à l'indice des termes des suites (u_n) et (v_n) en cours de calcul).

  3 $K \leftarrow 0$

× **Structure itérative**

Les lignes 4 à 9 consistent à calculer u_N et v_N. Pour cela, on calcule les termes successifs u_k et v_k des suites (u_n) et (v_n) jusqu'à ce que $k = N$. Autrement dit, on doit calculer les termes successifs u_k et v_k des suites (u_n) et (v_n) tant que $k < N$. Pour cela, on utilise une structure itérative `Tant que` (boucle while).

4 `Tant que` $K < N$

À chaque tour de boucle, on doit mettre à jour les variable `U`, `V` et `K`. Pour ce faire, on introduit une variable auxiliaire `Aux`. Détaillons le principe de la mise à jour dans cette boucle `Tant que`.

- Avant le 1er tour de boucle :

  `U` contient u_0, `V` contient v_0 et `K` contient 0

  lors du 1er tour de boucle :

`Aux` $\leftarrow U$	(`Aux` contient alors u_0, valeur contenue dans `U`)
$U \leftarrow 3\,$`Aux`$\,+ 4\,V$	(`U` contient alors $3 \times u_0 + 4 \times v_0 = u_1$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `Aux` et `V`)
$V \leftarrow$ `Aux`$\,+ 3\,V$	(`V` contient alors $u_0 + 3 \times v_0 = v_1$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `Aux` et `V`)
$K \leftarrow K + 1$	(`K` contient alors $0 + 1 = 1$, en prenant en compte la dernière valeur en date de `K`)

- avant le 2ème tour de boucle, d'après ce qui précède :

  `U` contient u_1, `V` contient v_1 et `K` contient 1

  lors du 1er tour de boucle :

`Aux` $\leftarrow U$	(`Aux` contient alors u_1, valeur contenue dans `U`)
$U \leftarrow 3\,$`Aux`$\,+ 4\,V$	(`U` contient alors $3 \times u_1 + 4 \times v_1 = u_2$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `Aux` et `V`)
$V \leftarrow$ `Aux`$\,+ 3\,V$	(`V` contient alors $u_1 + 3 \times v_1 = v_2$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `Aux` et `V`)
$K \leftarrow K + 1$	(`K` contient alors $1 + 1 = 2$, en prenant en compte la dernière valeur en date de `K`)

- ...
- avant le $N^{\text{ème}}$ tour de boucle :

$$\texttt{U} \text{ contient } u_{N-1}, \quad \texttt{V} \text{ contient } v_{N-1} \quad \text{et} \quad \texttt{K} \text{ contient } N-1$$

lors du 1^{er} tour de boucle :

$\texttt{Aux} \leftarrow U$	(`Aux` contient alors u_{N-1}, valeur contenue dans `U`)
$U \leftarrow 3\,\texttt{Aux} + 4\,V$	(`U` contient alors $3 \times u_{N-1} + 4 \times v_{N-1} = u_N$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `Aux` et `V`)
$V \leftarrow \texttt{Aux} + 3\,V$	(`V` contient alors $u_{N-1} + 3 \times v_{N-1} = v_N$, en prenant en compte les dernières valeurs en date de `Aux` et `V`)
$K \leftarrow K + 1$	(`K` contient alors $(N-1)+1 = N$, en prenant en compte la dernière valeur en date de `K`)

À l'issue de ce $N^{\text{ème}}$ tour de boucle : $\texttt{K} = N$. La boucle s'arrête donc. La dernière valeur contenue dans `U` (resp. `V`) est bien : u_N (resp. v_N).

□

Exercice 4 (bonus)

On considère le système de congruences (S) $\left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 2\ [3] \\ n & \equiv & 1\ [5] \end{array}\right.$, où n désigne un entier relatif.

1. Vérifier que 11 est solution de (S).

Démonstration.

- Tout d'abord : $11 = 3 \times 3 + 2$. D'où : $11 \equiv 2\ [3]$.
- Ensuite : $11 = 2 \times 5 + 1$. D'où : $11 \equiv 1\ [3]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que 11 est solution de } (S).}$$

□

2. Montrer que si n est solution de (S), alors $n - 11$ est divisible par 3.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que n est solution de (S). Alors, avec la question précédente :

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & [3] \\ 11 & \equiv & 2 & [3] \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{donc} & n - 11 & \equiv & 2 - 2\ [3] \\ \text{d'où} & n - 11 & \equiv & 0\ [3] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 3 \mid (n - 11).}$$

□

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.

Démonstration.
On procède par analyse-synthèse.

- Analyse.
  Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons que n est solution de (S).
  - × Alors, avec la question ***1.*** :

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 1 & [5] \\ 11 & \equiv & 1 & [5] \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{donc} & n - 11 & \equiv & 1 - 1\ [5] \\ \text{d'où} & n - 11 & \equiv & 0\ [5] \end{array}$$

  - × Avec la question précédente, on obtient alors :
    - ▸ $3 \mid (n - 11)$
    - ▸ $5 \mid (n - 11)$
    - ▸ $3 \wedge 5 = 1$

    Par corollaire du théorème de Gauss, on en déduit : $15 \mid (n - 11)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n - 11 = 15k$, *i.e.* $n = 15k + 11$.

- Synthèse.

  Soit $k \in \mathbb{Z}$. Vérifions que l'entier $15k + 11$ est bien solution du système (S).

  × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rrcll} & 15k & \equiv & 0 & [3] \\ \text{donc} & 15k + 11 & \equiv & 11 & [3] \\ \text{d'où} & 15 + 11 & \equiv & 2 & [3] \end{array}$$

  × De même :

$$\begin{array}{rrcll} & 15k & \equiv & 0 & [5] \\ \text{donc} & 15k + 11 & \equiv & 11 & [5] \\ \text{d'où} & 15 + 11 & \equiv & 1 & [5] \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement l'ensemble des solutions du système } (S) \text{ est :} \\ \{11 + 15k \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{array}}$$

□