DS3 /96

Exercice 1 /39

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.

- **1 pt**

2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.

- **1 pt : quantification de a et d et raisonnement par équivalence**
- **1 pt :** $A \in S \ \Leftrightarrow\ ad = 7$
- **1 pt :** $ad = 7 \ \Leftrightarrow\ (a \mid 7, \quad d \mid 4 \qquad ad = 7)$
- **1 pt :** $(a \mid 7, \quad d \mid 4 \qquad ad = 7) \ \Leftrightarrow\ (a, d) \in \{(-7, -1),\ (-1, -7),\ (1, 7),\ (7, 1)\}$
- **1 pt : exhiber les 4 matrices** $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ **et** $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. ***a)*** Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.

- **1 pt : énoncé**
- **3 pts : démonstration**
  - × **1 pt : structure de démonstration d'une implication**
  - × **1 pt :** $c = c\,(a \wedge b) = (ac) \wedge (bc)$
  - × **1 pt :** $a \mid (ac) \wedge (bc)$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1, 2)$ est une solution particulière de cette équation.

- **1 pt :** $2 \wedge 5 = 1$ **donc l'équation** (E) **admet des solutions**
- **1 pt : vérifier que** $(1, 2)$ **est solution de** (E)
- **6 pts :** $\mathcal{S} = \{(1 + 2k,\ 2 + 5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$
  - × **1 pt : structure de démonstration d'une analyse-synthèse**
  - × **4 pts : analyse**
    - **1 pt :** $5(x - 1) = 2(y - 2)$
    - **1 pt : par théorème de Gauss** $5 \mid (y - 2)$
    - **1 pt : il existe** $k \in \mathbb{Z}$ **tel que :** $y = 2 + 5k$
    - **1 pt :** $x = 1 + 2k$
  - × **1 pt : synthèse**

c) En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

- **1 pt :** $A \in S \ \Leftrightarrow \ (a, b) \in \mathcal{S}$
- **1 pt : l'ensemble des solution est** $\left\{\begin{pmatrix} 1+2k & 2+5k \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que : $ad - bc = 1$.

4. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

- **1 pt : utilisation du théorème de Bezout**

5. On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit AB. On admet : $AB = BA$.

- **1 pt :** $AB = I_2$ **car** $ad - bc = 1$

b) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

- **1 pt :** $AB = I_2$ **et** $BA = AB = I_2$ **donc** A **est inversible, d'inverse** $A^{-1} = B$

c) Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

- **1 pt :** $da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$ **donc** $A^{-1} \in S$

6. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $x = d\,x' - b\,y'$. On admet de même : $y = a\,y' - c\,x'$.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **donc** $A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- **1 pt : calcul matriciel pour obtenir** $x = d\,x' - b\,y'$

b) On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Démontrer : $D = D'$.

- **3 pts :** $D' \mid D$**.**
  - × **1 pt : il existe** $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ **tel que** $ux + vy = D$
  - × **1 pt :** $D = (ud - vc)x' + (va - ub)y'$ **d'après la question précédente**
  - × **1 pt :** $D' \mid D$ **car** $D' = x' \wedge y'$
- **2 pts :** $D \mid D'$
  - × **1 pt :** $x' = ax + by$
  - × **1 pt :** $y' = cx + dy$
- **1 pt :** $|D| = |D'|$
- **1 pt : un PGCD est toujours positif**

7. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_{n+1} & = & 2\,x_n & + & 3\,y_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 2\,y_n \end{array}\right.$.
En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

- **1 pt : introduction de** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $A \in S$
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
- **1 pt : comme** $A \in S$**, d'après** ***3.b)*** **:** $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \wedge y_{n+1} = x_n \wedge y_n$
- **1 pt : par récurrence immédiate :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \wedge y_n = x_0 \wedge y_0$
- **1 pt : par algorithme d'Euclide** $x_0 \wedge y_0 = 673$

Exercice 2 /21

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n} \end{array}\right.$$

1. ***a)*** Dans cette question, on suppose : $z_0 = i$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4.

- **1 pt :** $z_1 = 1 + i$
- **1 pt :** $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$
- **1 pt :** $z_3 = i$
- **0 pt :** $z_4 = 1 + i$

b) Que constatez-vous ?

- **1 pt : on conjecture :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = i = z_0$
- **1 pt : on conjecture de plus :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{3n+1} = 1 + i = z_1$ **et** $z_{3n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i = z_2$

2. On souhaite valider la conjecture faite à la question ***1.b)***.

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+3} = z_n$.

- **2 pts**

b) Démontrer alors, sans récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$.

- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N}$, $w_{p+1} = w_p$ **où** $w_p = z_{3p}$
- **1 pt :** (w_p) **suite constante donc :** $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = w_p = w_0 = z_0$

c) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les valeurs de z_{3p+1} et z_{3p+2} respectivement en fonction de z_1 et z_2.

- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p+1} = 1 - \dfrac{1}{z_{3p}} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$
- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p+2} = 1 - \dfrac{1}{z_{3p+1}} = 1 - \dfrac{1}{z_1} = z_2$

3. Application : déterminer z_{2018} dans le cas où : $z_0 = i$.

- **1 pt :** $2018 = 3 \times 672 + 2$
- **1 pt :** $z_{2018} = z_{3\times 672+2} = z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ i$

4. Existe-t-il des valeurs de z_0 pour lesquelles : $z_0 = z_1$? Exprimer alors z_2 en fonction de z_0.
Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

- **1 pt :** $z_0 = z_1 \ \Leftrightarrow\ z_0^2 - z_0 + 1 = 0$ **(car** $z_0 \neq 0$**)**
- **1 pt :** $\Delta = -3$
- **1 pt :** $\alpha = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ **et** $\beta = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$
- **1 pt :** $z_2 = z_0$
- **3 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt :** (z_n) **est la suite constante égale à** z_0

Exercice 3 /28

Partie A

Pour tout entier naturel n, on définit les entiers $a_n = 6 \times 5^n - 2$ et $b_n = 3 \times 5^n + 1$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, chacun des entiers a_n et b_n est congru à 0 modulo 4.

- **3 pts :** $a_n \equiv 0\ [4]$
  - × **1 pt :** $5 \equiv 1\ [4]$ **donc** $5^n \equiv 1\ [4]$
  - × **1 pt :** $5^n \equiv 1\ [4]$ **donc** $6 \times 5^n - 2 \equiv 6 \times 1 - 2\ [4]$
  - × **1 pt :** $4 \equiv 0\ [4]$ **ainsi, par transitivité des congruences** $a_n = 6 \times 5^n - 2 \equiv 0\ [4]$
- **1 pt :** $b_n \equiv 0\ [4]$

b) Pour tout entier naturel n, calculer $2\,b_n - a_n$.

- **1 pt**

c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le PGCD de a_n et b_n.

- **1 pt :** $2\,b_n + (-1)\,a_n = 4$ **donc** $a_n \wedge b_n \mid 4$
- **1 pt : d'après *1.a)*** $4 \mid a_n$ **et** $4 \mid b_n$ **d'où** $4 \mid a_n \wedge b_n$
- **1 pt :** $|a_n \wedge b_n| = |4| = 4$
- **1 pt :** $a_n \wedge b_n = 4$ **car un PGCD est toujours positif**

2. a) Démontrer : $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1\ [7]$.

- **1 pt :** $5 \equiv -2\ [7]$
- **1 pt :** $5^{2020} \equiv (-2)^{2020}\ [7]$ **et** $(-2)^{2020} = 2^{2020}$
- **1 pt :** $3 \times 5^{2020} + 1 \equiv 3 \times 2^{2020} + 1\ [7]$

b) En remarquant que $2020 = 3 \times 673 + 1$, montrer que b_{2020} est divisible par 7.

- **1 pt :** $2^3 \equiv 8\ [7]$**, donc** $2^3 \equiv 1\ [7]$
- **1 pt :** $2^{3\times 673} \equiv 1^{673}\ [7]$
- **1 pt :** $2^{3\times 673+1} \equiv 2\ [7]$
- **1 pt :** $3 \times 2^{2020} + 1 \equiv 7\ [7]$**, d'où** $3 \times 2^{2020} + 1 \equiv 0\ [7]$
- **1 pt : par transitivité des congruences** $b_{2020} \equiv 0\ [7]$

c) L'entier a_{2020} est-il divisible par 7 ? Justifier la réponse.

- **1 pt : structure de démonstration par l'absurde**
- **1 pt :** $7 \mid a_{2020}$, $4 \mid a_{2020}$ **et** $4 \wedge 7 = 1$**, donc, par corollaire du théorème de Gauss :** $28 \mid a_{2020}$
- **1 pt : de même** $28 \mid b_{2020}$
- **1 pt :** $28 \mid a_{2020} \wedge b_{2020}$**. Absurde ! (d'après *1.c)* :** $a_{2020} \wedge b_{2020} = 4$**)**

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$\times \quad u_0 = v_0 = 1$

$$\times \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & 3\,u_n & + & 4\,v_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & 3\,v_n \end{array} \right.$$

Pour un entier naturel N donné, on souhaite calculer les termes de rang N des suites (u_n) et (v_n) et on se demande si l'algorithme ci-contre permet ce calcul.

Algorithme

1 $U \leftarrow 1$
2 $V \leftarrow 1$
3 $K \leftarrow 0$
4 `Tant que` $K < N$
5 $\quad U \leftarrow 3\,U + 4\,V$
6 $\quad V \leftarrow U + 3\,V$
7 $\quad K \leftarrow K + 1$
8 `Fin Tant que`

3. On fait fonctionner l'algorithme avec $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs successivement affectées aux variables U, V et K.

- **3 pts : 1 pt par case**

U	V	K
1	1	0
7	10	1
61	91	2

4. L'algorithme permet-il effectivement de calculer u_N et v_N pour une valeur de N donnée ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de cet algorithme afin que les variables U et V contiennent bien les valeurs de u_N et v_N à la fin de son exécution.

- **1 pt :** $v_1 = 4 \neq 10$**, donc l'algorithme proposé ne permet pas de calculer les termes successifs de** (u_n) **et** (v_n)
- **3 pts : 1 pt par ligne modifiée**

5 $\quad \texttt{Aux} \leftarrow U$
6 $\quad U \leftarrow 3\,\texttt{Aux} + 4\,V$
7 $\quad V \leftarrow \texttt{Aux} + 3\,V$

Exercice 4 /8

On considère le système de congruences (S) $\left\{\begin{array}{lcl} n & \equiv & 2\ [3] \\ n & \equiv & 1\ [5] \end{array}\right.$, où n désigne un entier relatif.

1. Vérifier que 11 est solution de (S).

- **1 pt**

2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, démontrer que si n est solution de (S), alors $n - 11$ est divisible par 3.

- **1 pt : structure de démonstration d'une implication**
- **1 pt :** $n \equiv 2\ [3]$ **et** $11 \equiv 2\ [3]$ **donc** $n - 11 \equiv 0\ [3]$

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.

- **1 pt : structure de démonstration d'une analyse-synthèse**
- **3 pts : analyse**
  - × **1 pt : avec un raisonnement similaire à *2.* :** $n - 11 \equiv 0\ [5]$
  - × **1 pt :** $3 \mid (n-11)$, $5 \mid (n-11)$ **et** $3 \wedge 5 = 1$**, donc, par corollaire du théorème de Gauss :** $15 \mid (n - 11)$
  - × **1 pt : il existe donc** $k \in \mathbb{Z}$ **tel que** $n = 11 + 15k$
- **1 pt : synthèse**