DS3

Exercice 1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.
Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.

2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.

3. ***a)*** Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x - 2y = 1$. On pourra remarquer que le couple $(1, 2)$ est une solution particulière de cette équation.

c) En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que : $ad - bc = 1$.

4. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

5. On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit AB. On admet : $AB = BA$.

b) En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1}.

c) Montrer que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

6. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $x = d\,x' - b\,y'$. On admet de même : $y = a\,y' - c\,x'$.

b) On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Démontrer : $D = D'$.

7. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_{n+1} & = & 2\,x_n & + & 3\,y_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 2\,y_n \end{array} \right.$.
En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

Exercice 2

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n} \end{cases}$$

1. ***a)*** Dans cette question, on suppose : $z_0 = i$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4.

b) Que constatez-vous ?

2. On souhaite valider la conjecture faite à la question ***1.b)***.

a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+3} = z_n$.

b) Démontrer alors, sans récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$.

c) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les valeurs de z_{3p+1} et z_{3p+2} respectivement en fonction de z_1 et z_2.

3. Application : déterminer z_{2018} dans le cas où : $z_0 = i$.

4. Existe-t-il des valeurs de z_0 pour lesquelles : $z_0 = z_1$? Exprimer alors z_2 en fonction de z_0.
Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Exercice 3

Partie A

Pour tout entier naturel n, on définit les entiers $a_n = 6 \times 5^n - 2$ et $b_n = 3 \times 5^n + 1$.

1. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, chacun des entiers a_n et b_n est congru à 0 modulo 4.

b) Pour tout entier naturel n, calculer $2\,b_n - a_n$.

c) Déterminer le PGCD de a_n et b_n.

2. ***a)*** Démontrer : $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1\ [7]$.

b) En remarquant que $2020 = 3 \times 673 + 1$, montrer que b_{2020} est divisible par 7.

c) L'entier a_{2020} est-il divisible par 7 ? Justifier la réponse.

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = v_0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3\,u_n + 4\,v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3\,v_n \end{cases}$

Pour un entier naturel N donné, on souhaite calculer les termes de rang N des suites (u_n) et (v_n) et on se demande si l'algorithme ci-contre permet ce calcul.

Algorithme

```
U ← 1
V ← 1
K ← 0
Tant que K < N
    U ← 3U + 4V
    V ← U + 3V
    K ← K + 1
Fin Tant que
```

3. On fait fonctionner l'algorithme avec $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs successivement affectées aux variables U, V et K.

U	V	K
1	1	0
7	10	1

4. L'algorithme permet-il effectivement de calculer u_N et v_N pour une valeur de N donnée ?
Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de cet algorithme afin que les variables U et V contiennent bien les valeurs de u_N et v_N à la fin de son exécution.

Exercice 4 (bonus)

On considère le système de congruences $(S) \left\{ \begin{array}{lcl} n & \equiv & 2\ [3] \\ n & \equiv & 1\ [5] \end{array} \right.$, où n désigne un entier relatif.

1. Vérifier que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S), alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.