DS2

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z tels que les points de coordonnées $(1,0)$, $\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)$ et $\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour coordonnées $(1,0)$.

Partie A : étude d'exemples

1. **Un premier exemple**
Dans cette question, on pose : $z = i$.

a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$z^2 = i^2 = -1$$

$$\boxed{z^2 = -1}$$

- Ensuite :

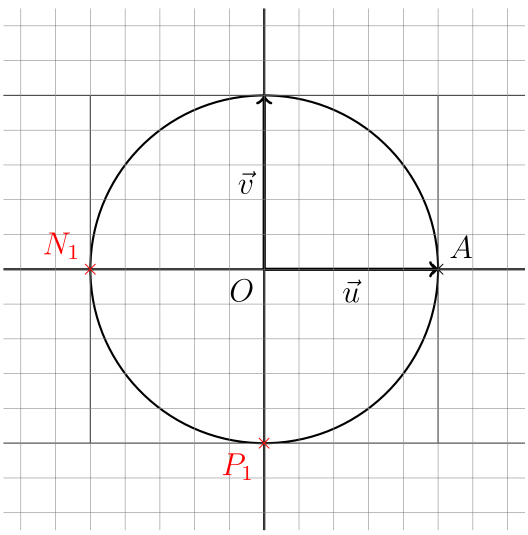
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \times i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = -i}$$

□

b) Placer les points N_1 de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)$, et P_1 de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que, dans ce cas, les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

Démonstration.
D'après la question précédente : $N_1 = (-1, 0)$ et $P_1 = (0, -1)$. On obtient alors la figure suivante.



□

2. **Une équation**
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

Démonstration.
On note Δ le discriminant du polynôme : $P(X) = X^2 + X + 1$. Alors :

$$\Delta \; = \; 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \; = \; -3$$

On en déduit que l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet exactement 2 solutions complexes :

$$z_1 \; = \; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 \; = \; \bar{z_1} \; = \; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions } \mathcal{S} \text{ de l'équation } z^2 + z + 1 = 0 \text{ est : } \mathcal{S} = \{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\}.}$$ □

3. **Un deuxième exemple**
Dans cette question, on pose : $z = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer les formes algébriques de z^2 et $\frac{1}{z}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z^2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$$ □

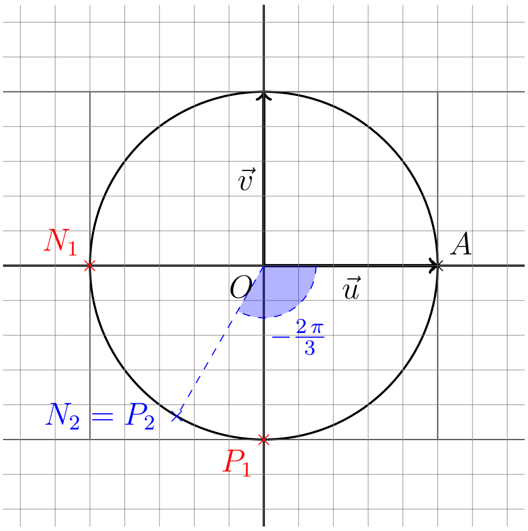
b) Placer les points N_2 de coordonnées $\left(\text{Re}\left(z^2\right), \text{Im}\left(z^2\right)\right)$, et P_2 de coordonnées $\left(\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ sur le graphique donné en annexe. Justifier.
On remarque que, dans ce cas, les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $N_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $P_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- Or : $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$N_2 \;=\; P_2 \;=\; \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

- On obtient alors la figure suivante :



□

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point de coordonnées $\left(\text{Re}\left(z^2\right), \text{Im}\left(z^2\right)\right)$, et P le point de coordonnées $\left(\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.

4. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} \;=\; \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) \;=\; z^2 + \cancel{z} + \cancel{1} - \cancel{z} - \cancel{1} - \frac{1}{z} \;=\; z^2 - \frac{1}{z}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$

□

5. On admet le résultat suivant :
Soit $(z_B, z_C, z_D) \in \mathbb{C}^3$. Si B est un point de coordonnées $(\mathrm{Re}(z_B), \mathrm{Im}(z_B))$, C un point de coordonnées $(\mathrm{Re}(z_C), \mathrm{Im}(z_C))$ et D un point de coordonnées $(\mathrm{Re}(z_D), \mathrm{Im}(z_D))$, alors les points B, C et D sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z_D - z_B \ = \ k\,(z_C - z_B)$$

En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcll}
A,\ N \text{ et } P \text{ alignés} & \Leftrightarrow & P,\ A \text{ et } N \text{ alignés} & \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\ z_N - z_P = k\,(z_A - z_P) & \textit{(d'après l'énoncé)} \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\ z^2 - \dfrac{1}{z} = k\left(1 - \dfrac{1}{z}\right) & \begin{array}{l}\textit{(car } A = (\mathrm{Re}(1), \mathrm{Im}(1)),\\ N = \left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)\\ \textit{et } P = \left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\textit{)}\end{array} \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\ \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{z}\right) = k\left(1 - \dfrac{1}{z}\right) & \begin{array}{l}\textit{(d'après la question}\\ \textit{précédente)}\end{array} \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\ \left(\left(z^2 + z + 1\right) - k\right)\left(1 - \dfrac{1}{z}\right) = 0 & \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\quad z^2 + z + 1 - k = 0 \ \texttt{OU} \ 1 - \dfrac{1}{z} = 0 & \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\quad (z^2 + z + 1 = k) \ \texttt{OU} \ (1 = \dfrac{1}{z}) & \\
& \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{R},\quad (z^2 + z + 1 = k) \ \texttt{OU} \ (1 = z) & \\
& \Leftrightarrow & (\exists k \in \mathbb{R},\ z^2 + z + 1 = k) \quad \texttt{OU} \quad (\exists k \in \mathbb{R},\ z = 1) & \\
& \Leftrightarrow & (z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}) \quad \texttt{OU} \quad (z = 1) & \\
& \Leftrightarrow & z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} &
\end{array}$$

La dernière équivalence est bien vérifiée car, si $z = 1$, alors : $z^2 + z + 1 = 3 \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Finalement, } A,\ N \text{ et } P \text{ sont alignés si et seulement si } z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}.}$$ □

6. On pose $z = x + i\,y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y)$.

Démonstration.
En utilisant les notations de l'énoncé :

$$\begin{array}{rcl}
z^2 + z + 1 & = & (x + i\,y)^2 + (x + i\,y) + 1 \\
& = & x^2 + 2i\,xy + (i\,y)^2 + x + i\,y + 1 \\
& = & x^2 + 2i\,xy - y^2 + x + i\,y + 1 \\
& = & x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y)
\end{array}$$

$$\boxed{z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y)}$$ □

7. ***a)*** Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points A, N et P soient alignés.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- D'après la question **5.**, A, N et P sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.
- Or, d'après la question précédente :

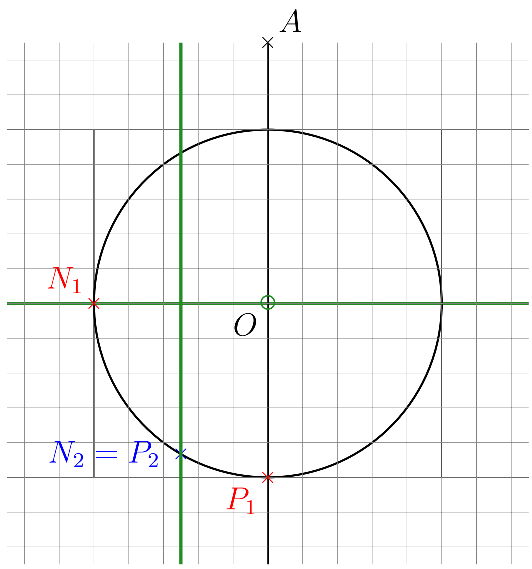
$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 2xy + y = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+1)\, y = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \ \texttt{OU} \ y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ \texttt{OU} \ y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi l'ensemble des complexes } z \text{ tels que } A,\ N \text{ et } P \text{ soient alignés est} \\ \{-\frac{1}{2} + i\, y \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}^*\} \ (\text{car } z \neq 0).\end{array}}$$

□

b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Démonstration.
On trace les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$ en ôtant l'origine (car $z \neq 0$). On obtient la figure suivante :



□

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & -7 \\ 2x & + & 3y & & & - & 4t & = & 24 \\ & - & 5y & + & 2z & - & t & = & -6 \\ 3x & & & + & 4z & - & 9t & = & 39 \end{array}\right.$

Démonstration.
Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & -7 \\ 2x & + & 3y & & & - & 4t & = & 24 \\ & - & 5y & + & 2z & - & t & = & -6 \\ 3x & & & + & 4z & - & 9t & = & 39 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & -7 \\ & - & y & + & 2z & - & 10t & = & 38 \\ & - & 5y & + & 2z & - & t & = & -6 \\ & - & 6y & + & 7z & - & 18t & = & 60 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & -7 \\ & - & y & + & 2z & - & 10t & = & 38 \\ & & & - & 8z & + & 49t & = & -196 \\ & & & - & 5z & + & 42t & = & -168 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - 6L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & -7 \\ & - & y & + & 2z & - & 10t & = & 38 \\ & & & - & 8z & + & 49t & = & -196 \\ & & & & & & 91t & = & -364 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_4 \leftarrow \frac{1}{91} L_4}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & = & -7 \\ & - & y & + & 2z & - & 10t & = & 38 \\ & & & - & 8z & + & 49t & = & -196 \\ & & & & & & t & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 10L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 49L_4}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & & & = & 5 \\ & - & y & + & 2z & & & = & -2 \\ & & & - & 8z & & & = & 0 \\ & & & & & & t & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{8} L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & & & = & 5 \\ & - & y & + & 2z & & & = & -2 \\ & & & & z & & & = & 0 \\ & & & & & & t & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 5 \\ & - & y & & & = & -2 \\ & & & z & & = & 0 \\ & & & & t & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & & & & = & 1 \\ & -y & & & = & -2 \\ & & z & & = & 0 \\ & & & t & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions } \mathcal{S} \text{ de ce sytème est : } \mathcal{S} = \{(1, 2, 0, -4)\}.}$$

2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Démonstration.
Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}$.

- **Initialisation** :
  - × D'une part : $(u+v)^0 = 1$.
  - × D'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^k\, v^{0-k} = \binom{0}{0} u^0\, v^0 = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $(u+v)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{(n+1)-k}$).

$$\begin{aligned}
& (u+v)^{n+1} \\
= \ & (u+v)\,(u+v)^n \\
= \ & (u+v) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \ & u \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} + v \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k} && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1}\, v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(toujours par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n}{k-1} u^k\, v^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \\
= \ & \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n}{n} u^{n+1}\, v^{n+1-(n+1)} \right) + \left(\binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k} \right) \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + u^{n+1}\, v^0 && \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \ & \binom{n}{0} u^0\, v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^k\, v^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} u^{n+1}\, v^0 \\
= \ & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} u^k\, v^{n+1-k}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } (u, v) \in \mathbb{C}^2, \text{ par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k\, v^{n-k}.}$$ □

3. ***a)*** Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « la suite (u_n) est constante ».

Démonstration.

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c}$$

Commentaire

On pouvait aussi proposer la réponse suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$$

□

b) Écrire, toujours avec des quantificateurs, la négation de l'assertion précédente.

Démonstration.

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \neq c}$$

Commentaire

Si on avait choisi la proposition ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$) en question précédente, alors on obtient la négation :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0+1} \neq u_{n_0}$$

□

Exercice 3

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}$$

1. Écrire en **Python** une fonction `calculAn` prenant en paramètre un entier naturel `n` et renvoyant la liste des `n` premiers termes de la suite (a_n).

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante :

```
def calculAn(n) :
    a = [(4**(2*i + 1) + 1) / 5 for i in range(n)]
    return a
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `calculAn`,
  × elle prend en entrée le paramètre `n`,
  × elle admet pour variable de sortie `a`.

```
def calculAn(n) :
```

```
    return a
```

- On définit ensuite la variable `a` pour qu'elle contienne la liste des `n` premiers termes de la suite (a_n). On procède pour cela par compréhension de liste.
  (rappelons que la commande `for i in range(n)` *permet d'effectuer une boucle pour* `i` *variant de* 0 *à* $\mathtt{n} - 1$*)*

```
    a = [(4**(2*i + 1) + 1) / 5 for i in range(n)]
```

Commentaire

Si on ne pense pas à utiliser la compréhension de liste, on peut proposer le programme suivant :

```
def calculAn(n) :
    a = []
    for i in range(n) :
        a.append((4**(2*i + 1) + 1) / 5)
    return a
```

On rappelle que la commande `a.append(x)` ajoute l'élément `x` à la fin de la liste `a`.

$\square$

2. Calculer a_2 et a_3.

Démonstration.
Par définition de la suite (a_n) :

- tout d'abord :

$$a^2 = \frac{4^{2\times 2+1}+1}{5} = \frac{4^5+1}{5} = \frac{1024+1}{5} = 205$$

$$\boxed{a^2 = 205}$$

- de plus :

$$a^3 = \frac{4^{2\times 3+1}+1}{5} = \frac{4^7+1}{5} = \frac{16384+1}{5} = 3277$$

$$\boxed{a^3 = 3277}$$

□

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 16\,a_n - 3$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'une part :

$$a_{n+1} = \frac{4^{2\,(n+1)+1}+1}{5} = \frac{4^{2n+3}+1}{5}$$

- D'autre part :

$$16\,a_n - 3 = 4^2\,\frac{4^{2n+1}+1}{5} - 3 = \frac{4^2\,(4^{2n+1}+1)}{5} - \frac{15}{5} = \frac{4^{2n+3}+4^2-15}{5} = \frac{4^{2n+3}+1}{5}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 16\,a_n - 3.}$$

□

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $a_n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation**
  D'après l'énoncé : $a_0 = \dfrac{4^{2\times 0+1}+1}{5} = \dfrac{4+1}{5} = 1$. Ainsi : $a_0 \in \mathbb{N}^*$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$).
  - Tout d'abord, d'après la question précédente : $a_{n+1} = 16\,a_n - 3$.
    Comme $16 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \mathbb{N}$ (par hypothèse de récurrence), on en déduit : $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$.
  - De plus, par hypothèse de récurrence : $a_n \in \mathbb{N}^*$. En particulier :

$$\begin{array}{rl} & a_n \geqslant 1 \\ \text{donc} & 16\,a_n \geqslant 16 \\ \text{d'où} & 16\,a_n - 3 \geqslant 13 \\ \text{ainsi} & a_{n+1} \geqslant 13 \geqslant 1 \end{array}$$

  Finalement, comme $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ et $a_{n+1} \geqslant 1$, alors : $a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande ici de démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$ (et non $a_n \in \mathbb{N}^*$). Cependant, la relation de récurrence déterminée en question précédente ne permet pas de démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $a_n \in \mathbb{N}$. L'hérédité n'est en effet plus valide.
- Reprenons ce raisonnement. Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $a_{n+1} \in \mathbb{N}$).
  × On démontre comme précédemment : $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$.
  × Par hypothèse de récurrence : $a_n \in \mathbb{N}$. En particulier :

$$\begin{array}{rl} & a_n \geqslant 0 \\ \text{donc} & 16\,a_n \geqslant 0 \\ \text{d'où} & 16\,a_n - 3 \geqslant -3 \\ \text{ainsi} & a_{n+1} \geqslant -3 \not\geqslant 0 \end{array}$$

  On peut donc seulement conclure : $a_{n+1} \in [\![-3, +\infty[\![$ (et non $a_{n+1} \in \mathbb{N}$).
- C'est pour cela que l'on a ici démontré un résultat plus fort que celui réclamé par l'énoncé. □

5. Dans cette question, on utilise l'égalité de la question ***2.*** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et d_n un diviseur **positif** à la fois de a_n et de a_{n+1}.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n est égal à 1 ou à 3.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question ***3.*** : $a_{n+1} = 16\,a_n - 3$. On en déduit :

$$a_{n+1} - 16\,a_n \;=\; -3$$

Or, par définition de d_n : $d_n \mid a_n$ et $d_n \mid a_{n+1}$. On en déduit (par compatibilité de la divisibilité par combinaison linéaire entière) :

$$d_n \mid (a_{n+1} - 16\,a_n) \qquad \text{d'où} \qquad d_n \mid (-3)$$

On en conclut : $d_n \in \{-3, -1, 1, 3\}$.
Or : $d_n \geqslant 0$. Ainsi : $d_n \in \{1, 3\}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ d_n \text{ est égal à 1 ou 3.}}$$

□

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \equiv a_n$ [3].

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
- D'après la question ***3.*** : $a_{n+1} = 16\,a_n - 3$.
- Or : $16 \equiv 1$ [3]. On obtient (par compatibilité de la congruence avec le produit) :

$$16\,a_n \;\equiv\; 1 \times a_n \; [3]$$

- De plus : $3 \equiv 0$ [3]. On obtient (par compatibilité de la congruence avec la somme) :

$$16\,a_n - 3 \;\equiv\; a_n - 0 \; [3]$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \equiv a_n \; [3].}$$

□

c) Vérifier : $a_0 \equiv 1$ [3].
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le seul diviseur positif commun à a_n et a_{n+1} est 1.

Démonstration.

- D'après l'initialisation de la récurrence de la question ***4.*** : $a_0 = 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } a_0 \equiv 1 \ [3].}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note, comme en question ***5.a)***, d_n un diviseur positif commun à a_n et a_{n+1}.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $d_n = 1$.

  - **Initialisation**
  D'après la question ***5.a)***, $d_0 \in \{1, 3\}$.
  Or : $a_0 \equiv 1$ [3]. On en déduit : $3 \nmid a_0$. Ainsi : $d_0 = 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $d_{n+1} = 1$).
  Raisonnons par l'absurde.
  Supposons : $d_{n+1} \neq 1$. Alors, d'après la question ***5.a)*** : $d_{n+1} = 3$.

    × Ainsi, par définition de d_{n+1} :

    $$3 \mid a_{n+1} \qquad \text{et} \qquad 3 \mid a_{n+2}$$

    En particulier : $a_{n+1} \equiv 0$ [3].

    × Or, d'après la question précédente : $a_{n+1} \equiv a_n$ [3]. Ainsi, par symétrie de la congruence : $a_n \equiv a_{n+1}$ [3]. Par transitivité de la congruence :

    $$a_n \equiv 0 \ [3] \qquad \text{d'où} \qquad 3 \mid a_n$$

  On obtient alors :

  $$3 \mid a_n \qquad \text{et} \qquad 3 \mid a_{n+1}$$

  L'entier 3 est donc un diviseur (positif) commun à a_n et a_{n+1}.
  Absurde ! En effet, par hypothèse de récurrence, le seul diviseur commun positif à a_n et a_{n+1} est $d_n = 1$.
  Ainsi : $d_{n+1} = 1$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le seul diviseur positif commun à } a_n \text{ et } a_{n+1} \text{ est } 1.}$$

□

6. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier $n \in [\![2, +\infty[\![$, le nombre a_n n'est pas premier, c'est-à-dire qu'il existe $(p_n, q_n) \in ([\![2, +\infty[\![)^2$ tel que : $a_n = p_n \times q_n$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n \ = \ 2^{n+1}\,(2^n - 1) + 1 \qquad \text{et} \qquad c_n \ = \ 2^{n+1}\,(2^n + 1) + 1$$

a) Démontrer, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$: $5\,a_n = b_n\,c_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
b_n\,c_n &= \left(2^{n+1}\,(2^n - 1) + 1\right)\ \left(2^{n+1}\,(2^n + 1) + 1\right) \\
&= \left(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right)\ \left(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right) \\
&= \left(2^{2n+1}\right)^2 + \cancel{2^{2n+1} \times 2^{n+1}} + 2^{2n+1} - \cancel{2^{n+1} \times 2^{2n+1}} - \left(2^{n+1}\right)^2 - \cancel{2^{n+1}} + 2^{2n+1} + \cancel{2^{n+1}} + 1 \\
&= 2^{2\times(2n+1)} + 2 \times 2^{2n+1} - 2^{2\times(n+1)} + 1 \\
&= \left(2^2\right)^{2n+1} + 2^1 \times 2^{2n+1} - 2^{2n+2} + 1 \\
&= 4^{2n+1} + \cancel{2^{2n+2}} - \cancel{2^{2n+2}} + 1 \\
&= 5\ \frac{4^{2n+1} + 1}{5} \ = \ 5\ a_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 5\,a_n = b_n\,c_n}$$

□

b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Démontrer : $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cc}
\text{comme} & n \geqslant 2 \\
\text{alors} & 2^n \geqslant 2^2 = 4 \\
\text{donc} & 2^n - 1 \geqslant 3 \\
\text{d'où} & 2^{n+1}\,(2^n - 1) \geqslant 2^3 \times 3 = 24 \qquad \textit{(car } 2^3 \geqslant 0\textit{)} \\
\text{ainsi} & 2^{n+1}\,(2^n - 1) + 1 \geqslant 25
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } b_n \geqslant 25 > 5.}$$

- Ensuite :

$$\begin{array}{cc}
\text{comme} & n \geqslant 2 \\
\text{alors} & 2^n \geqslant 2^2 = 4 \\
\text{donc} & 2^n + 1 \geqslant 5 \\
\text{d'où} & 2^{n+1}\,(2^n + 1) \geqslant 2^3 \times 5 = 40 \qquad \textit{(car } 2^3 \geqslant 0\textit{)} \\
\text{ainsi} & 2^{n+1}\,(2^n - 1) + 1 \geqslant 41
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } c_n \geqslant 41 > 5.}$$

□

c) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On admet :

$$5 \mid b_n \qquad \text{ou} \qquad 5 \mid c_n$$

En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.

Démonstration.
D'après l'énoncé : $5 \mid b_n$ ou $5 \mid c_n$. Deux cas se présentent donc.

- Si $5 \mid b_n$, alors il existe $b'_n \in \mathbb{N}$ tel que : $b_n = 5\, b'_n$.
  - × D'après la question précédente : $b_n > 5$. On en déduit : $5\, b'_n > 5$. Et donc : $b'_n > 1$.
    Comme $b'_n \in \mathbb{N}$, on obtient : $b'_n \in [\![2, +\infty[\![$.
  - × D'après la question ***6.a)*** : $5\, a_n = b_n\, c_n = 5\, b'_n\, c_n$. Ainsi :

    $$a_n = b'_n\, c_n$$

    avec $(b'_n, c_n) \in ([\![2, +\infty[\![)^2$.
    On en déduit que a_n n'est pas premier.
- Si $5 \mid c_n$, alors alors il existe $c'_n \in \mathbb{N}$ tel que : $c_n = 5\, c'_n$.
  - × D'après la question précédente : $c_n > 5$. On en déduit : $5\, c'_n > 5$. Et donc : $c'_n > 1$.
    Comme $c'_n \in \mathbb{N}$, on obtient : $c'_n \in [\![2, +\infty[\![$.
  - × D'après la question ***6.a)*** : $5\, a_n = b_n\, c_n = b_n\, (5\, c'_n)$. Ainsi :

    $$a_n = b_n\, c'_n$$

    avec $(b_n, c'_n) \in ([\![2, +\infty[\![)^2$.
    On en déduit que a_n n'est pas premier.

$$\boxed{\text{Finalement, dans tous les cas, } a_n \text{ n'est pas premier.}}$$

Commentaire

Comme les raisonnements pour les deux cas de la disjonction sont identiques (à l'interversion de b_n et c_n près), on aurait pu se contenter d'écrire pour le cas $5 \mid c_n$ « en raisonnant comme dans le cas précédent, on obtient aussi que a_n n'est pas un nombre premier ». □

Annexe - Exercice 1