DS2 /76

Exercice 1 /27

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z tels que les points de coordonnées $(1, 0)$, $\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)$ et $\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ soient alignés.

Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour coordonnées $(1, 0)$.

Partie A : étude d'exemples

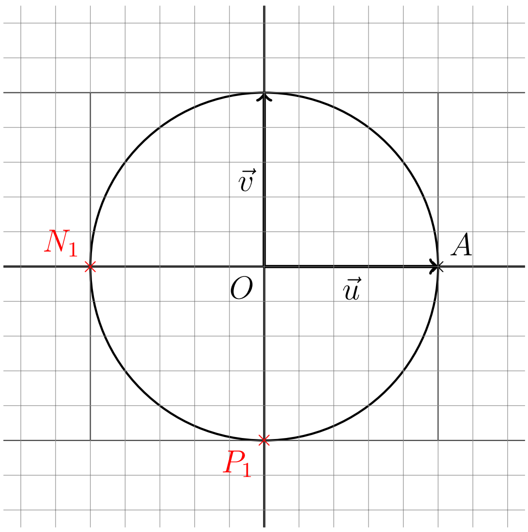
1. **Un premier exemple**
Dans cette question, on pose : $z = i$.

a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

- **1 pt :** $z^2 = -1$
- **1 pt :** $\frac{1}{z} = -i$

b) Placer les points N_1 de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)$, et P_1 de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que, dans ce cas, les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

- **2 pts (1 pt pour N_1 et 1 pt pour P_1)**



2. **Une équation**
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $\Delta = -3$
  - × **1 pt :** $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$
  - × **1 pt :** $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

3. **Un deuxième exemple**

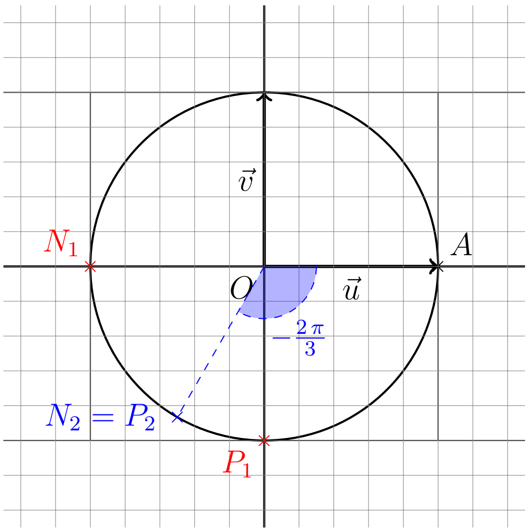
Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer les formes algébriques de z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

- **1 pt :** $z^2 = -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- **2 pts :** $\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Placer les points N_2 de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)$, et P_2 de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)$ sur le graphique donné en annexe. Justifier.
On remarque que, dans ce cas, les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $N_2 = P_2 = \left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right), \sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
  - × **1 pt : placer N_2 et P_2**



Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(z^2\right), \mathrm{Im}\left(z^2\right)\right)$, et P le point de coordonnées $\left(\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right), \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)$.

4. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} \;=\; \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

- **1 pt**

5. On admet le résultat suivant :
Soit $(z_B, z_C, z_D) \in \mathbb{C}^3$. Si B est un point de coordonnées $(\mathrm{Re}(z_B), \mathrm{Im}(z_B))$, C un point de coordonnées $(\mathrm{Re}(z_C), \mathrm{Im}(z_C))$ et D un point de coordonnées $(\mathrm{Re}(z_D), \mathrm{Im}(z_D))$, alors les points B, C et D sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z_D - z_B \;=\; k\,(z_C - z_B)$$

En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

- **1 pt : A, N et P alignés** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ z_N - z_P = k\,(z_A - z_P)$
- **1 pt :** $\exists k \in \mathbb{R},\ z_N - z_P = k\,(z_A - z_P) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ z^2 - \frac{1}{z} = k\left(1 - \frac{1}{z}\right)$
- **1 pt :** $\exists k \in \mathbb{R},\ z^2 - \frac{1}{z} = k\left(1 - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ (z^2+z+1)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = k\left(1 - \frac{1}{z}\right)$
- **1 pt :** $\exists k \in \mathbb{R},\ (z^2+z+1)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = k\left(1 - \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\quad (z^2+z+1 = k)\ \texttt{OU}\ (1 = \frac{1}{z})$
- **1 pt :** $\exists k \in \mathbb{R},\quad (z^2+z+1 = k)\ \texttt{OU}\ (1 = \frac{1}{z}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R},\ z^2+z+1 = k)\quad \texttt{OU}\quad (\exists k \in \mathbb{R},\ z = 1)$
- **1 pt :** $(\exists k \in \mathbb{R},\ z^2+z+1 = k)\quad \texttt{OU}\quad (\exists k \in \mathbb{R},\ z = 1) \Leftrightarrow z^2+z+1 \in \mathbb{R}$

6. On pose $z = x + i\,y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i\,(2xy + y)$.

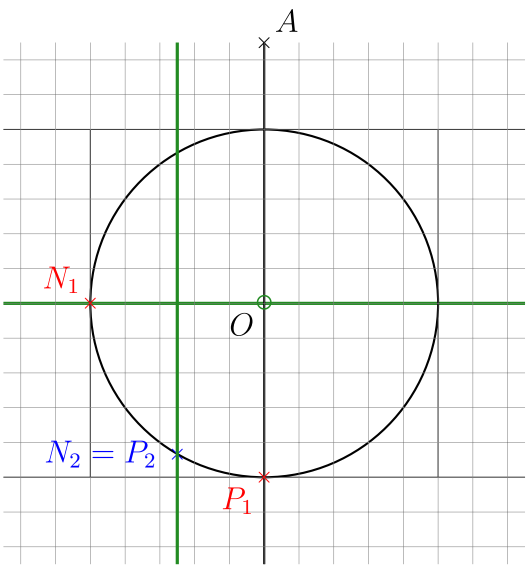
- **1 pt**

7. ***a)*** Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points A, N et P soient alignés.

- **1 pt : A, N et P alignés si et seulement si** $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$
- **1 pt :** $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0$
- **1 pt :** $2xy + y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ \texttt{OU}\ y = 0$
- **1 pt : l'ensemble des complexes z tels que A, N et P soient alignés est** $\{-\frac{1}{2} + i\,y \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}^*\}$ **(car $z \neq 0$).**

b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

- **3 pts : 1 pt par droite et 1 pt pour enlever l'origine**



Exercice 2 /17

1. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & z & + & 3\,t & = & -7 \\ 2\,x & + & 3\,y & & & - & 4\,t & = & 24 \\ & - & 5\,y & + & 2\,z & - & t & = & -6 \\ 3\,x & & & + & 4\,z & - & 9\,t & = & 39 \end{array}\right.$

- **8 pts :** $\mathcal{S} = \{(1, 2, 0, -4)\}$

2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

- **1 pt : énoncé**
- **5 pts (dont 1 pt initialisation)**

3. ***a)*** Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « la suite (u_n) est constante ».

  - **1 pt**

  b) Écrire, toujours avec des quantificateurs, la négation de l'assertion précédente.

  - **2 pts**

Exercice 3 /32

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}$$

1. Écrire en **Python** une fonction `calculAn` prenant en paramètre un entier naturel `n` et renvoyant la liste des `n` premiers termes de la suite (a_n).

- **4 pts**

2. Calculer a_2 et a_3.

- **1 pt :** $a^2 = 205$
- **1 pt :** $a^3 = 3277$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 16\,a_n - 3$.

- **2 pts**

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.

- **4 pts :**
  × **1 pt : initialisation**
  × **3 pts : hérédité dont 1 pt pour** $a_n \geqslant 1$

5. Dans cette question, on utilise l'égalité de la question *2.* afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

  a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et d_n un diviseur **positif** à la fois de a_n et de a_{n+1}.
  Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n est égal à 1 ou à 3.

  - **2 pts :** $d_n \mid (-3)$
  - **1 pt :** $d_n \geqslant 0$

b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \equiv a_n$ [3].

- **1 pt :** $16\, a_n \equiv 1 \times a_n$ [3]
- **1 pt :** $16\, a_n - 3 \equiv a_n - 0$ [3]
- **1 pt : utilisation qst 3**

c) Vérifier : $a_0 \equiv 1$ [3].
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le seul diviseur positif commun à a_n et a_{n+1} est 1.

- **1 pt :** $a_0 = 1$
- **4 pts : récurrence**
  × **1 pt : initialisation**
  × **3 pts : hérédité dont 1 pt pour la structure de démonstration par l'absurde**

6. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier $n \in [\![2, +\infty[\![$, le nombre a_n n'est pas premier, c'est-à-dire qu'il existe $(p_n, q_n) \in ([\![2, +\infty[\![)^2$ tel que : $a_n = p_n \times q_n$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n \;=\; 2^{n+1}\,(2^n - 1) + 1 \qquad \text{et} \qquad c_n \;=\; 2^{n+1}\,(2^n + 1) + 1$$

a) Démontrer, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$: $5\, a_n = b_n\, c_n$.

- **2 pts**

b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. Démontrer : $b_n > 5$ et $c_n > 5$.

- **2 pts :** $b_n \geqslant 25 > 5$
- **1 pt :** $c_n \geqslant 41 > 5$

c) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On admet :

$$5 \mid b_n \qquad \text{ou} \qquad 5 \mid c_n$$

En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.

- **1 pt : disjonction de cas**
- **2 pts : cas** $5 \mid b_n$
  × **1 pt : définition** $5 \mid b_n$
  × **1 pt :** $a_n = b'_n\, c_n$ **avec** $(b'_n, c_n) \in ([\![2, +\infty[\![)^2$
- **1 pt : idem pour cas** $5 \mid c_n$

Annexe - Exercice 1