

DS2

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z tels que les points de coordonnées $(1, 0)$, $(\operatorname{Re}(z^2), \operatorname{Im}(z^2))$ et $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ soient alignés.

Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour coordonnées $(1, 0)$.

Partie A : étude d'exemples

1. Un premier exemple

Dans cette question, on pose : $z = i$.

a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

b) Placer les points N_1 de coordonnées $(\operatorname{Re}(z^2), \operatorname{Im}(z^2))$, et P_1 de coordonnées $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ sur le graphique donné en annexe.

On remarque que, dans ce cas, les points A , N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. Un deuxième exemple

Dans cette question, on pose : $z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Déterminer les formes algébriques de z^2 et $\frac{1}{z}$.

b) Placer les points N_2 de coordonnées $(\operatorname{Re}(z^2), \operatorname{Im}(z^2))$, et P_2 de coordonnées $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ sur le graphique donné en annexe. Justifier.

On remarque que, dans ce cas, les points A , N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.

On note N le point de coordonnées $(\operatorname{Re}(z^2), \operatorname{Im}(z^2))$, et P le point de coordonnées $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right), \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$.

4. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

5. On admet le résultat suivant :

Soit $(z_B, z_C, z_D) \in \mathbb{C}^3$. Si B est un point de coordonnées $(\operatorname{Re}(z_B), \operatorname{Im}(z_B))$, C un point de coordonnées $(\operatorname{Re}(z_C), \operatorname{Im}(z_C))$ et D un point de coordonnées $(\operatorname{Re}(z_D), \operatorname{Im}(z_D))$, alors les points B , C et D sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z_D - z_B = k(z_C - z_B)$$

En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A , N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

6. On pose $z = x + iy$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$.
7. a) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points A , N et P soient alignés.
b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant dans \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = -7 \\ 2x + 3y - 4t = 24 \\ -5y + 2z - t = -6 \\ 3x + 4z - 9t = 39 \end{cases}$$

2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.
3. a) Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « la suite (u_n) est constante ».
b) Écrire, toujours avec des quantificateurs, la négation de l'assertion précédente.

Exercice 3

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}$$

1. Écrire en **Python** une fonction `calculAn` prenant en paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste des n premiers termes de la suite (a_n) .
2. Calculer a_2 et a_3 .
3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.
5. Dans cette question, on utilise l'égalité de la question 2. afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n) .
- a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et d_n un diviseur **positif** à la fois de a_n et de a_{n+1} .
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n est égal à 1 ou à 3.
- b) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{3}$.
- c) Vérifier : $a_0 \equiv 1 \pmod{3}$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le seul diviseur positif commun à a_n et a_{n+1} est 1.
6. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, le nombre a_n n'est pas premier, c'est-à-dire qu'il existe $(p_n, q_n) \in (\llbracket 2, +\infty \llbracket)^2$ tel que : $a_n = p_n \times q_n$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2^{n+1}(2^n + 1) + 1$$

- a) Démontrer, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$: $5a_n = b_n c_n$.
- b) Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. Démontrer : $b_n > 5$ et $c_n > 5$.
- c) Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$. On admet :

$$5 \mid b_n \quad \text{ou} \quad 5 \mid c_n$$

En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.

Annexe - Exercice 1

