DS1

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 1 \end{cases}$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est un entier.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n).

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $u_0 = 0$.
- De plus, par définition de la suite (u_n) :

$$u_1 \;=\; u_{0+1} \;=\; 3\,u_0 + 1 \;=\; 3 \times 0 + 1 \;=\; 1$$

- De même : $u_2 = 3\,u_1 + 1 = 4$.
- Puis : $u_3 = 3\,u_2 + 1 = 13$.
- Enfin : $u_4 = 3\,u_3 + 1 = 40$.

Finalement, les cinq premiers termes de la suite (u_n) sont :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 13$ et $u_4 = 40$.

□

2. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: u_{2n} est pair.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_0 = 0$. Ainsi u_0 est bien pair.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{2(n+1)}$ est pair).
    Par hypothèse de récurrence, u_{2n} est pair. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $u_{2n} = 2\,k$.
    De plus :

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} &= u_{2n+2} \\ &= 3\,u_{2n+1} + 1 \\ &= 3\,(3\,u_{2n} + 1) + 1 \\ &= 9\,u_{2n} + 4 \\ &= 9 \times 2\,k + 4 \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2\,(9\,k + 2) \end{aligned}$$

    Or : $9\,k + 2 \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $u_{2(n+1)}$ est pair.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n} est pair.

- Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{2n+1} est impair.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$u_{2n+1} \;=\; 3\,u_{2n} + 1$$
  Or, d'après le point précédent, u_{2n} est pair. Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $u_{2n} = 2\,k$. On obtient alors :
  $$u_{2n+1} \;=\; 3 \times 2\,k + 1 \;=\; 2 \times (3\,k) + 1$$
  Or : $3\,k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que u_{2n+1} est impair.

  $\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} \text{ est impair.}}$

$\boxed{\text{On a bien démontré que les termes de la suite } (u_n) \text{ sont alternativement pairs et impairs.}}$

Commentaire

- On a ici démontré plus précisément que les termes d'indice pair de la suite (u_n) sont pairs et les termes d'indice impair de la suite (u_n) sont impairs.
- On prêtera attention à ne pas confondre « terme pair » (resp. impair) et « terme d'indice pair » (resp. d'indice impair).
  - × Les termes d'indice pair de la suite (u_n) sont les termes de la suite (u_{2n}) (c'est bien l'indice « $2n$ » qui est pair).
    De la même manière, les termes d'indice impair de la suite (u_n) sont les termes de la suite (u_{2n+1}) (c'est encore l'indice « $2n+1$ » qui est impair).
  - × Soit $n \in \mathbb{N}$. Dire que le terme u_n est pair signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 2\,k$.
    Notons que l'indice n n'a pas obligatoirement à être pair.
    On a le même raisonnement pour l'imparité.
- On pouvait aussi raisonner de la manière suivante.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.
  - × si u_n est impair, alors :
    $$\begin{array}{lrcl} & u_n & \equiv & 1\,[2] \\ \text{donc} & 3\,u_n & \equiv & 3\,[2] \\ \text{d'où} & 3\,u_n + 1 & \equiv & 4\,[2] \\ \text{ainsi} & u_{n+1} & \equiv & 4\,[2] \end{array}$$
    Or : $4 \equiv 0\,[2]$. Ainsi, par transitivité : $u_{n+1} \equiv 0\,[2]$. Autrement dit, u_{n+1} est pair.
  - × si u_n est pair, alors :
    $$\begin{array}{lrcl} & u_n & \equiv & 0\,[2] \\ \text{donc} & 3\,u_n & \equiv & 0\,[2] \\ \text{d'où} & 3\,u_n + 1 & \equiv & 1\,[2] \\ \text{ainsi} & u_{n+1} & \equiv & 1\,[2] \end{array}$$
    Autrement dit, u_{n+1} est impair.

  On en déduit que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

□

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\,u_n = 3^n - 1$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $2\,u_n = 3^n - 1$.

▸ **Initialisation** :

× d'une part : $u_0 = 0$.

× d'autre part : $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Ainsi : $u_0 = 3^0 - 1$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $2\,u_{n+1} = 3^{n+1} - 1$).

$$\begin{aligned} 2\,u_{n+1} &= 2\,(3\,u_n + 1) \\ &= 3 \times (2\,u_n) + 2 \\ &= 3 \times (3^n - 1) + 2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 3^{n+1} - 3 + 2 \\ &= 3^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2\,u_n = 3^n - 1$.

□

b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que : $3^n \equiv 1\,[7]$.

Démonstration.
Pour trouver le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $3^n \equiv 1\,[7]$, on teste les entiers à partir de 1.

- Tout d'abord : $3^1 \equiv 3\,[7]$. Donc 1 ne convient pas.
- Ensuite : $3^2 \equiv 9\,[7]$, *i.e.* $3^2 \equiv 2\,[7]$. Donc 2 ne convient pas.
- Puis : $3^3 \equiv 3 \times 2\,[7]$, *i.e.* $3^3 \equiv 6\,[7]$. Donc 3 ne convient pas.
- De plus : $3^4 \equiv 3 \times 6\,[7]$, *i.e.* $3^4 \equiv 18\,[7]$, ou encore $3^4 \equiv 4\,[7]$. Donc 4 ne convient pas.
- Alors : $3^5 \equiv 3 \times 64\,[7]$, *i.e.* $3^5 \equiv 12\,[7]$, ou encore $3^5 \equiv 5\,[7]$. Donc 5 ne convient pas.
- Enfin : $3^6 \equiv 3 \times 5\,[7]$, *i.e.* $3^6 \equiv 15\,[7]$, ou encore $3^6 \equiv 1\,[7]$. Donc 6 convient.

Finalement, 6 est le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $3^n \equiv 1\,[7]$.

□

c) En déduire que $2\,u_{2022}$ est divisible par 7.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après ***4.a)*** : $2\,u_{2022} = 3^{2022} - 1$.
- Ensuite, d'après la question précédente : $3^6 \equiv 1\,[7]$. On cherche donc à effectuer la division euclidienne de 2022 par 6. On obtient :

$$2022 = 6 \times 337$$

On en déduit : $3^{2022} = \left(3^6\right)^{337}$. Or :

$$\begin{array}{lrcl} & 3^6 & \equiv & 1\,[7] \\ \text{donc} & \left(3^6\right)^{337} & \equiv & 1^{337}\,[7] \\ \text{d'où} & 3^{2022} & \equiv & 1\,[7] \\ \text{ainsi} & 3^{2022}-1 & \equiv & 0\,[7] \\ \text{alors} & 2\,u_{2022} & \equiv & 0\,[7] \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut bien que } 2\,u_{2022} \text{ est divisible par 7.}}$$

□

4. a) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

Démonstration.
On utilise les valeurs trouvées en question ***1.***.

- Tout d'abord : $u_0 = 0$ et :

$$\begin{cases} 0 = 0 \times 5 + 0 \\ 0 \leqslant 0 < 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } u_0 \text{ par 5 est 0.}}$$

- Ensuite : $u_1 = 1$ et :

$$\begin{cases} 1 = 0 \times 5 + 1 \\ 0 \leqslant 1 < 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } u_1 \text{ par 5 est 1.}}$$

- De plus : $u_2 = 4$ et :

$$\begin{cases} 4 = 0 \times 5 + 4 \\ 0 \leqslant 4 < 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } u_2 \text{ par 5 est 4.}}$$

- De même : $u_3 = 13$ et :

$$\begin{cases} 13 = 2 \times 5 + 3 \\ 0 \leqslant 3 < 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } u_3 \text{ par 5 est 3.}}$$

- Enfin : $u_4 = 40$ et :

$$\begin{cases} 40 = 8 \times 5 + 0 \\ 0 \leqslant 0 < 5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } u_4 \text{ par 5 est 0.}}$$

Commentaire

On pouvait se permettre de détailler proprement uniquement 2 des premiers termes (u_3 et u_4 par exemple) puisque le raisonnement est exactement le même pour les 5 termes à étudier.

□

b) Recopier et compléter le tableau suivant en justifiant vos réponses.

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5					

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}$.

- Si le reste de la division euclidienne de m par 5 est 0, alors :

$$\begin{array}{lrcl} & m & \equiv & 0\,[5] \\ \text{donc} & 3m & \equiv & 3\times 0\,[5] \\ \text{d'où} & 3m & \equiv & 0\,[5] \\ \text{ainsi} & 3m+1 & \equiv & 0+1\,[5] \\ \text{puis} & 3m+1 & \equiv & 1\,[5] \end{array}$$

  Le reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 est donc 1.

- Si le reste de la division euclidienne de m par 5 est 1, alors :

$$\begin{array}{lrcl} & m & \equiv & 1\,[5] \\ \text{donc} & 3m & \equiv & 3\times 1\,[5] \\ \text{d'où} & 3m & \equiv & 3\,[5] \\ \text{ainsi} & 3m+1 & \equiv & 3+1\,[5] \\ \text{puis} & 3m+1 & \equiv & 4\,[5] \end{array}$$

  Le reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 est donc 4.

- Si le reste de la division euclidienne de m par 5 est 2, alors :

$$\begin{array}{lrcl} & m & \equiv & 2\,[5] \\ \text{donc} & 3m & \equiv & 3\times 2\,[5] \\ \text{d'où} & 3m & \equiv & 1\,[5] \\ \text{ainsi} & 3m+1 & \equiv & 1+1\,[5] \\ \text{puis} & 3m+1 & \equiv & 2\,[5] \end{array}$$

  Le reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 est donc 2.

- Si le reste de la division euclidienne de m par 5 est 3, alors :

$$\begin{array}{lrcl} & m & \equiv & 3\,[5] \\ \text{donc} & 3m & \equiv & 3\times 3\,[5] \\ \text{d'où} & 3m & \equiv & 4\,[5] \\ \text{ainsi} & 3m+1 & \equiv & 4+1\,[5] \\ \text{puis} & 3m+1 & \equiv & 0\,[5] \end{array}$$

  Le reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 est donc 0.

- Si le reste de la division euclidienne de m par 5 est 4, alors :

$$\begin{array}{lrcl} & m & \equiv & 4\,[5] \\ \text{donc} & 3m & \equiv & 3\times 4\,[5] \\ \text{d'où} & 3m & \equiv & 2\,[5] \\ \text{ainsi} & 3m+1 & \equiv & 2+1\,[5] \\ \text{puis} & 3m+1 & \equiv & 3\,[5] \end{array}$$

Le reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 est donc 3.

On obtient alors le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5	1	4	2	0	3

Commentaire

Comme pour la question précédente, on pouvait ici se contenter de détailler proprement 1 cas parmi les 5 puisque le raisonnement est exactement le même pour chacun d'entre eux. □

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons : $u_n \equiv 4\,[5]$.

- Alors, d'après la question précédente appliquée à $m = u_n$, on en déduit :

$$\underbrace{3\,u_n+1}_{=\,u_{n+1}} \equiv 3\,[5]$$

- Ainsi, d'après la question précédente appliquée à $m = u_{n+1}$, on en déduit :

$$\underbrace{3\,u_{n+1}+1}_{=\,u_{n+2}} \equiv 0\,[5]$$

- On en déduit, d'après la question précédente appliquée à $m = u_{n+2}$, on en déduit :

$$\underbrace{3\,u_{n+2}+1}_{=\,u_{n+3}} \equiv 1\,[5]$$

- Enfin, d'après la question précédente appliquée à $m = u_{n+3}$, on en déduit :

$$\underbrace{3\,u_{n+3}+1}_{=\,u_{n+4}} \equiv 4\,[5]$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré que, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \equiv 4\,[5] \ \Rightarrow\ u_{n+4} \equiv 4\,[5].}$$

□

d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

Démonstration.
On souhaite montrer que l'assertion de l'énoncé est fausse. Autrement dit :

$$\texttt{NON}(\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \equiv 2\,[5])$$

On souhaite donc démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \not\equiv 2\,[5]$.

- Commençons par démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{4n+2} \equiv 4\,[5]$.
  - **Initialisation** :
    Tout d'abord : $u_{0+2} = u_2$.
    Or, d'après ***5.a)*** : $u_2 \equiv 4\,[5]$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $u_{4(n+1)+2} \equiv 4\,[5]$).
    Tout d'abord : $u_{4(n+1)+2} = u_{4n+4+2} = u_{4n+6}$.
    De plus, par hypothèse de récurrence : $u_{4n+2} \equiv 4\,[5]$.
    Or, d'après la question précédente appliquée à $4n+2$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} & & u_{(4n+2)+4} & \equiv & 4\,[5] \\ & & \shortparallel & & \\ u_{4(n+1)+2} & = & u_{4n+6} & & \end{array}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} \equiv 4\,[5]$.
- On démontre de même (toujours par récurrence) :

$$\begin{array}{rcl} u_{4n} & \equiv & 0\,[5] \\ u_{4n+1} & \equiv & 1\,[5] \\ u_{4n+3} & \equiv & 3\,[5] \end{array}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} u_{4n} & \not\equiv & 2\,[5] \\ u_{4n+1} & \not\equiv & 2\,[5] \\ u_{4n+2} & \not\equiv & 2\,[5] \\ u_{4n+3} & \not\equiv & 2\,[5] \end{array}$$

  On en déduit : $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m \not\equiv 2\,[5]$.

$$\boxed{\text{Il n'existe donc pas d'entier } n \text{ tel que : } u_n \equiv 2\,[5].}$$

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas, à répondre par la négative.
- On étudie dans cette réponse les sous-suites de la suite (u_n) dont les indices sont définies par les restes possibles d'une division euclidienne par 4 :

$$(u_{4n}) \qquad (u_{4n+1}) \qquad (u_{4n+2}) \qquad \text{et} \qquad (u_{4n+3})$$

Cette idée est suggérée par la question précédente qui fait démontrer que, toutes les 4 itérations (on passe de l'indice n à l'indice $n+4$), les restes dans la division euclidienne des termes de la suite (u_n) sont identiques. On est donc incité pour cette question-ci à déterminer tous les restes possibles dans la division euclidienne des termes de la suite (u_n) par 5 en considérant seulement 4 cas (chaque cas correspondant à l'une des sous-suites citées précédemment).

$\square$

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right.$

Démonstration.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & - & 2\,z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} 2\,x & & & = & 1 \\ & 2\,y & & = & 1 \\ & & -\ 2\,z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \quad (x, y, z) \ = \ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions } \mathcal{S} \text{ du système proposé est : } \mathcal{S} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right\}.}$$

□

2. ***a)*** Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « la suite (u_n) est croissante ».

Démonstration.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n}$$

□

b) Écrire, toujours avec des quantificateurs, la négation de l'assertion précédente.

Démonstration.

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n}$$

□

Exercice 3

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, c$$

où a_1, a_2, ..., a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
Le nombre c est la clé de valisation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres. L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

- Initialisation :

- I prend la valeur 0
- P prend la valeur 0
- R prend la valeur 0

- Traitement :

- Pour k allant de 0 à 7 :
  × R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2\, a_{2k+1}$ par 9
  × I prend la valeur $I + R$
  Fin Pour
- Pour k allant de 1 à 7 :
  × P prend la valeur $P + a_{2k}$
  Fin Pour
- S prend la valeur $I + P + c$

- Sortie :

- Si S est un multiple de 10 alors :
  × Afficher « Le numéro de la carte est correct »
- Sinon :
  × Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct »
  Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a) Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

Démonstration.
Détaillons en partie le remplissage du tableau.

- Tout d'abord, k prend la valeur 0. Ainsi :
  × $a_{2\times 0+1} = a_1 = 5$.
  × donc : $2\, a_{2\times 0+1} = 10$.
  × le reste de la division euclidienne de $2\, a_{2\times 0+1}$ par 9 est donc 1.
  × ainsi, I prend la valeur $I + R$, c'est-à-dire 1 (puisqu'à ce stade, la variable I a simplement été initialisée à 0).

On peut donc remplir la 1$^{\text{ère}}$ colonne du tableau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5							
$2\, a_{2k+1}$	10							
R	1							
I	1							

- Ensuite, k prend la valeur 1. Ainsi :
  - × $a_{2\times 1+1} = a_3 = 3$.
  - × donc : $2\,a_{2\times 1+1} = 6$.
  - × le reste de la division euclidienne de $2\,a_{2\times 1+1}$ par 9 est donc 6.
  - × ainsi, I prend la valeur $I+R$, c'est-à-dire $1+6=7$ (puisqu'à ce stade, la variable I contient la valeur 1).

  On peut donc remplir la 2ème colonne du tableau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3						
$2\,a_{2k+1}$	10	6						
R	1	6						
I	1	7						

- Détaillons encore une étape. La variable k prend ensuite la valeur 2. Ainsi :
  - × $a_{2\times 2+1} = a_5 = 4$.
  - × donc : $2\,a_{2\times 2+1} = 8$.
  - × le reste de la division euclidienne de $2\,a_{2\times 2+1}$ par 9 est donc 8.
  - × ainsi, I prend la valeur $I+R$, c'est-à-dire $7+8=15$ (puisqu'à ce stade, la variable I contient la valeur 7).

  On peut donc remplir la 3ème colonne du tableau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4					
$2\,a_{2k+1}$	10	6	8					
R	1	6	8					
I	1	7	15					

En procédant de la même manière jusqu'à ce k prenne la valeur 7, on obtient finalement le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2\,a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

□

b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

Démonstration.

- Procédons de la même manière que dans la question précédente pour obtenir la valeur finale de P.
  - × Tout d'abord, k prend la valeur 1. Ainsi :
    - $a_{2\times 1} = a_2 = 6$
    - donc P prend la valeur $P + a_{2\times 1}$, c'est-à-dire $0+6=6$ (puisqu'à ce stade, la variable P a simplement été initialisée à 0).

On peut donc remplir la 1ère colonne d'un tableau similaire à celui de la question précédente :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6						
P	6						

× Ensuite, k prend la valeur 2. Ainsi :

- $a_{2\times 2} = a_4 = 5$
- donc P prend la valeur $P + a_{2\times 1}$, c'est-à-dire $6 + 5 = 1$ (puisqu'à ce stade, la variable P contient la valeur 6).

On peut donc remplir la 2ème colonne d'un tableau similaire à celui de la question précédente :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5					
P	6	11					

En procédant de la même manière jusqu'à ce que k prenne la valeur 7, on obtient finalement le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	1	4
P	6	11	11	13	18	19	23

- On en déduit la valeur finale de S :

$$S = I + P + c = 26 + 23 + 1 = 50$$

- On obtient bien : $10 \mid S$.

$$\boxed{\text{Le numéro de carte 5635 4002 9561 3411 est donc correct.}}$$

□

c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

Démonstration.

- En procédant comme en question ***1.a)***, on obtient le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	6	3	4	0	9	6	3	1
$2\,a_{2k+1}$	12	6	8	0	18	12	6	2
R	3	6	8	0	0	3	6	2
I	3	9	17	17	17	20	26	28

- En procédant comme en question ***1.b)***, on obtient le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	a	5	0	2	5	1	4
P	a	$5+a$	$5+a$	$7+a$	$12+a$	$13+a$	$17+a$

- On en déduit la valeur finale de S :

$$S = I + P + c = 28 + (17 + a) + 1 = 46 + a$$

- Pour choisir a de sorte que le numéro reste correct, il doit vérifier 2 propriétés :
  × $a \in [\![0, 9]\!]$
  × $10 \mid S$. Autrement dit : $10 \mid (46 + a)$.

$\boxed{\text{Le seul chiffre possible pour que le numéro } 6a35\ 4002\ 9561\ 3411 \text{ reste correct est donc } 4.}$ □

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

Démonstration.
Supposons qu'on connaisse les 15 premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Alors les réel I et P définis par l'algorithme sont fixés.

- Existence : On cherche à démontrer qu'il existe un entier c tel que :
  × $c \in [\![0, 9]\!]$
  × $10 \mid I + P + c$

  On note r le reste de la division euclidienne de $I + P$ par 10. Ainsi :

$$\begin{cases} I + P \equiv r\,[10] \\ 0 \leqslant r < 10 \end{cases}$$

  Ainsi, en choisissant : $c = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ 10 - r & \text{si } r \in [\![1, 9]\!] \end{cases}$, on obtient bien :
  × $c \in [\![0, 9]\!]$
  × comme $c \equiv 10 - r\,[10]$:

$$\begin{array}{lrcl} & (I + P) + c & \equiv & \cancel{r} + (10 - \cancel{r})\,[10] \\ \text{donc} & I + P + c & \equiv & 10\,[10] \\ \text{d'où} & I + P + c & \equiv & 0\,[10] \\ \text{ainsi} & 10 & \mid & I + P + c \end{array}$$

$\boxed{\text{Il existe donc bien une clé } c \text{ rendant le numéro de carte correct.}}$

- Unicité : Soient $(c_1, c_2) \in [\![0, 9]\!]^2$ deux clés rendant le numéro de carte correct. Alors :

$$\begin{cases} 10 \mid I + P + c_1 \\ 10 \mid I + P + c_2 \end{cases}$$

  On en déduit :

$$\begin{cases} I + P + c_1 \equiv 0\,[10] \\ I + P + c_2 \equiv 0\,[10] \end{cases}$$

  Alors :

$$\begin{array}{lrcl} & (\cancel{I + P} + c_1) - (\cancel{I + P} + c_2) & \equiv & 0\,[10] \\ \text{donc} & c_1 - c_2 & \equiv & 0\,[10] \\ \text{d'où} & c_1 & \equiv & c_2\,[10] \end{array}$$

  Or : $(c_1, c_2) \in [\![0, 9]\!]^2$. Ainsi : $c_1 = c_2$.

$\boxed{\text{On en déduit que la clé rendant le numéro de carte correct est unique.}}$

Commentaire

On pourra retenir cette méthode. Pour démontrer l'unicité d'un objet x vérifiant une propriété $\mathcal{P}$:
1) on introduit deux objets vérifiant $\mathcal{P}$: soit $(x_1, x_2) \in E^2$ vérifiant $\mathcal{P}$.

2) on démontre par implication : $x_1 = x_2$.
C'est par exemple comme cela que l'on démontre l'unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne. □

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

Démonstration.
Soit $n \in [\![0, 9]\!]$.
On considère le numéro de carte bancaire : *nnnn nnnn nnnn nnnn*.

- En procédant comme en question ***1.a)***, on obtient le tableau suivant, en notant r le reste de la division euclidienne de $2n$ par 9 :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	n	n	n	n	n	n	n	n
$2\,a_{2k+1}$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$
R	r	r	r	r	r	r	r	r
I	r	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$	$7r$	$8r$

- En procédant comme en question ***1.b)***, on obtient le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	n	n	n	n	n	n	n
P	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$

- On en déduit la valeur finale de S :

$$S = I + P + n = 8r + 7n + n = 8(r + n)$$

- On détermine enfin toutes les valeurs possibles de S suivant les valeurs de n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
r	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$n + r$	0	3	6	9	12	6	9	12	15	9
$S = 8(n + r)$	0	24	48	72	96	48	72	96	120	72

On remarque que seul les cas $n = 0$ et $n = 8$ vérifient : $10 \mid S$.

On en déduit que seuls les numéros 0000 0000 0000 0000 et 8888 8888 8888 8888 sont des numéros de cartes bancaires à un seul chiffre corrects. □

4. Coder en **Python**, à l'aide de l'algorithme fourni par l'énoncé, une fonction `VerifNum` prenant en paramètre une liste `A` contenant les 16 chiffres d'un numéro de carte bancaire et renvoyant un message indiquant si le numéro de carte entré est correct ou non.
On pourra utiliser la commande prédéfinie en ***Python*** *pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`*. Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie* 3 *: le reste dans la division euclidienne de* 11 *par* 4*.*

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
def VerifNum(A):
    I = 0
    P = 0
    R = 0
    for k in range(8):
        R = (2 * A[2 * k]) % 9
        I = I + R
    for k in range(7):
        P = P + A[2 * k + 1]
    S = I + P + A[15]
    if (S % 10) == 0:
        Message = ''Le numéro de la carte est correct''
    else:
        Message = ''Le numéro de la carte n'est pas correct''
    return Message
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**

  On commence par préciser la structure de la fonction :

  × cette fonction se nomme `VerifNum`,

  × elle prend en entrée le paramètre `A`,

  × elle admet pour variable de sortie `Message`.

```
def VerifNum(A):
```

```
    return Message
```

  On initialise ensuite les variables `I`, `P` et `R` par 0 comme spécifié dans l'énoncé.

```
    I = 0
    P = 0
    R = 0
```

- **Structures itératives**
  - Les lignes 5 à 7 consistent à mettre à jour la variable `I`. On procède pour cela, comme décrit dans l'énoncé :
    - On commence par stocker dans la variable `R` la valeur du reste de la division euclidienne de $2\,a_{2k+1}$ par 10. On rappelle alors 3 points :
      - comme dit dans l'énoncé, la commande **Python** permettant d'obtenir le reste d'une division euclidienne est l'opérateur `%`,
      - les coordonnées des listes en **Python** sont numérotées en partant de 0 (la 1[ère] coordonnée de la liste `A` est `A[0]` par exemple),
      - la commande `for k in range(n):` permet d'effectuer une boucle pour `k` variant de 0 à $\mathtt{n}-1$.

      Une fois ces 3 points pris en compte, on obtient la mise à jour de `R` suivante :

```
5       for k in range(8):
6           R = (2 * A[2 * k]) % 9
```

    - On met ensuite à jour la variable `I` comme décrit dans l'algorithme de l'énoncé.

```
7               I = I + R
```

  - Les lignes 8 à 9 consistent à mettre à jour la variable `P`. On procède pour cela, comme décrit dans l'énoncé.

```
8       for k in range(7):
9           P = P + A[2 * k + 1]
```

- **Fin de la fonction**
  - Une fois les variables `I` et `P` mises à jour, on définit la variable `S` comme précisé dans l'énoncé.

```
10      S = I + P + A[15]
```

  - On finit en utilisant une structure conditionnelle :
    - si le reste de la division euclidienne de `S` par 10 est 0 (*i.e.* si `S` est un multiple de 10), alors le message renvoyé est : « Le numéro de la carte est correct »
    - si le reste de la division euclidienne de `S` par 10 n'est pas 0 (*i.e.* si `S` est un multiple de 10), alors le message renvoyé est : « Le numéro de la carte n'est pas correct »

```
11      if (S % 10) == 0:
12          Message = ''Le numéro de la carte est correct''
13      else:
14          Message = ''Le numéro de la carte n'est pas correct''
```

□

Exercice 3 - Question *1.a)*

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2\,a_{2k+1}$								
R								
I								