DS1 /75

Exercice 1 /32

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 1 \end{cases}$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est un entier.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n).

- **1 pt :** $u_0 = 0$**,** $u_1 = 1$**,** $u_2 = 4$
- **1 pt :** $u_3 = 13$**,** $u_4 = 40$

2. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.

- **3 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** u_{2n} **pair**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **2 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** u_{2n+1} **impair (dont 1 pt pour définition parité de** u_{2n}

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2\,u_n = 3^n - 1$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que : $3^n \equiv 1\,[7]$.

- **0 pt :** 1 **ne convient pas**
- **1 pt :** 2 **ne convient pas**
- **1 pt :** 3 **ne convient pas**
- **1 pt :** 4 **ne convient pas**
- **1 pt :** 5 **ne convient pas**
- **1 pt :** 6 **convient**

c) En déduire que $2\,u_{2022}$ est divisible par 7.

- **1 pt :** $2\,u_{2022} = 3^{2022} - 1$ **d'après *4.a)***
- **1 pt :** $2022 = 6 \times 337$
- **1 pt :** $3^{2022} \equiv 1\,[7]$
- **1 pt :** $2\,u_{2022} \equiv 0\,[7]$

4. a) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

- **1 pt : le reste de la division euclidienne de** u_0 **(resp.** u_1**, resp.** u_2**) par** 5 **est** 0 **(resp.** 1**, resp.** 4**)**
- **1 pt : le reste de la division euclidienne de** u_3 **(resp.** u_4**) par** 5 **est** 3 **(resp.** 0**)**

b) Recopier et compléter le tableau suivant en justifiant vos réponses.

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5					

- **2 pts : justifications**
- **1 pt : résultat :**

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5	1	4	2	0	3

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

- **1 pt : structure de démonstration**
- **1 pt : application de *4.b)* à u_n**
- **1 pt : application de *4.b)* à u_{n+1}, u_{n+2} et u_{n+3}**

d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

- **1 pt : on souhaite démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \not\equiv 2\,[5]$**
- **3 pts : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} \equiv 4\,[5]$**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **1 pt : $u_{4n} \equiv 0\,[5]$, $u_{4n+1} \equiv 1\,[5]$ et $u_{4n+3} \equiv 3\,[5]$**

Exercice 2 /8

1. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right.$

- **4 pts : 1 pt par opération de pivot**
- **1 pt : $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$**

2. ***a)*** Écrire avec des quantificateurs l'assertion suivante : « la suite (u_n) est croissante ».

- **1 pt**

b) Écrire, toujours avec des quantificateurs, la négation de l'assertion précédente.

- **2 pts**

Exercice 3 /35

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, c$$

où a_1, a_2, …, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
Le nombre c est la clé de valisation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres. L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

- **Initialisation** :
  - I prend la valeur 0
  - P prend la valeur 0
  - R prend la valeur 0
- **Traitement** :
  - Pour k allant de 0 à 7 :
    × R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2\,a_{2k+1}$ par 9
    × I prend la valeur $I + R$
    Fin Pour
  - Pour k allant de 1 à 7 :
    × P prend la valeur $P + a_{2k}$
    Fin Pour
  - S prend la valeur $I + P + c$
- **Sortie** :
  - Si S est un multiple de 10 alors :
    × Afficher « Le numéro de la carte est correct »
  - Sinon :
    × Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct »
    Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.

a) Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

- **3 pts : 1 pt pour chacune des 3 premières lignes**
- **2 pt : ligne sur I**

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2\,a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

- **1 pt : $1^{\text{ère}}$ ligne tableau**

- **1 pt : $2^{\text{ème}}$ ligne tableau**

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	6	5	0	2	5	1	4
P	6	11	11	13	18	19	23

- **1 pt : $S = 50$ puis conclusions**

c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

- **1 pt : 1^{er} tableau**

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	6	3	4	0	9	6	3	1
$2\,a_{2k+1}$	12	6	8	0	18	12	6	2
R	3	6	8	0	0	3	6	2
I	3	9	17	17	17	20	26	28

- **1 pt : $2^{\text{ème}}$ tableau**

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	a	5	0	2	5	1	4
P	a	$5+a$	$5+a$	$7+a$	$12+a$	$13+a$	$17+a$

- **1 pt : $S = 46 + a$**
- **1 pt : $a \in [\![0,9]\!]$ donc $a = 4$**

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

- **4 pts : existence**
  - × **2 pts :** $c = \begin{cases} 0 & \textbf{si } r = 0 \\ 10 - r & \textbf{si } r \in [\![1,9]\!] \end{cases}$
  - × **2 pts :** $10 \mid I + P + c$
- **3 pts : unicité (dont 1 pt pour la structure de démonstration)**

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

- **1 pt : 1^{er} tableau**

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	n	n	n	n	n	n	n	n
$2\,a_{2k+1}$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$
R	r	r	r	r	r	r	r	r
I	r	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$	$7r$	$8r$

- **0 pt : $2^{\text{ème}}$ tableau**

k	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k}	n	n	n	n	n	n	n
P	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$

- **1 pt :** $S = 8(r + n)$
- **3 pts : tableau final**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
r	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$n + r$	0	3	6	9	12	6	9	12	15	9
$S = 8(n + r)$	0	24	48	72	96	48	72	96	120	72

- **1 pt : les seules solutions sont** 0 **et** 8

4. Coder en **Python**, à l'aide de l'algorithme fourni par l'énoncé, une fonction `VerifNum` prenant en paramètre une liste `A` contenant les 16 chiffres d'un numéro de carte bancaire et renvoyant un message indiquant si le numéro de carte entré est correct ou non.
On pourra utiliser la commande prédéfinie en ***Python*** *pour obtenir le reste de la division euclidienne de a par b. Il s'agit de la commande* `a % b`. *Par exemple, la commande* `11 % 4` *renvoie* 3 *: le reste dans la division euclidienne de* 11 *par* 4.

- **10 pts**
  - × **1 pt : structure fonction (ligne** 1 **et** 15**)**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **3 pts :** $1^{\text{ère}}$ **boucle**
  - × **2 pts :** $2^{\text{ème}}$ **boucle**
  - × **1 pt : mise à jour** `S`
  - × **2 pts : structure conditionnelle**

```
1  def VerifNum(A):
2      I = 0
3      P = 0
4      R = 0
5      for k in range(8):
6          R = (2 * A[2 * k]) % 9
7          I = I + R
8      for k in range(7):
9          P = P + A[2 * k + 1]
10     S = I + P + A[15]
11     if (S % 10) == 0:
12         Message = ''Le numéro de la carte est correct''
13     else:
14         Message = ''Le numéro de la carte n'est pas correct''
15     return Message
```

Exercice 2 - Question *1.a)*

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2\,a_{2k+1}$								
R								
I								