# DM2

## Exercice 150 p.47 (*Manuel Mathématiques Expertes - Le Livre Scolaire*)

### Partie A : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit $\alpha = a + i\,b$ un nombre complexe, où $a$ et $b$ sont réels. On cherche à déterminer s'il existe un nombre complexe $z$ tel que : $z^2 = \alpha$.
On pose $z = x + i\,y$, où $x$ et $y$ sont deux réels.

***1.*** Montrer que si $z$ est une solution de l'équation $z^2 = \alpha$, alors il en est de même de $-z$.

*Démonstration.*
Supposons : $z^2 = \alpha$. Alors :

$$(-z)^2 \;=\; (-1)^2\, z^2 \;=\; z^2 \;=\; \alpha$$

Ainsi, $-z$ est bien solution de l'équation $z^2 = \alpha$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est solution de } z^2 = \alpha, \text{ alors } -z \text{ aussi.}}$$

**Commentaire**

Il s'agit même d'une équivalence. En effet, soit $z \in \mathbb{C}$ : $(-z)^2 \;=\; z^2$. Ainsi :

$$z^2 = \alpha \;\Leftrightarrow\; (-z)^2 = \alpha$$

Autrement dit, $z$ est solution de $z^2 = \alpha$ si et seulement si $-z$ l'est.

□

***2.*** Montrer que $z$ est solution de $z^2 = \alpha$ si et seulement si $x$ et $y$ vérifient le système suivant :

$$(E)\;\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2\,x\,y & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

*Démonstration.*

- On remarque tout d'abord :

$$z^2 \;=\; (x+i\,y)^2 \;=\; x^2 + 2\,i\,x\,y + (i\,y)^2 \;=\; (x^2-y^2) + i\,2xy$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2 \text{ et } \mathrm{Im}\left(z^2\right) = 2xy.}$$

- On raisonne ensuite par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $z^2 = \alpha$.

× Tout d'abord, on obtient : $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}\left(z^2\right) & = & \mathrm{Re}\,(\alpha) \\ \mathrm{Im}\left(z^2\right) & = & \mathrm{Im}\,(\alpha) \end{array}\right.$ D'où, avec le point précédent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2\,x\,y & = & b \end{array}\right.$$

× De plus :

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (\mathrm{Re}\,(\alpha))^2 + (\mathrm{Im}\,(\alpha))^2 && \textit{(par définition de } a \textit{ et } b\textit{)} \\ &= \alpha\,\overline{\alpha} \\ &= z^2\,\overline{(z^2)} && \textit{(car } z \textit{ est solution de } z^2=\alpha\textit{)} \\ &= z^2\,(\overline{z})^2 \;=\; (z\,\overline{z})^2 \\ &= \Big((\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2\Big)^2 \\ &= \left(x^2+y^2\right)^2 && \textit{(par définition de } x \textit{ et } y\textit{)} \end{aligned}$$

Finalement : $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 &=& a \\ 2\,x\,y &=& b \\ x^2 + y^2 &=& \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$.

($\Leftarrow$) Supposons : $\left\{\begin{array}{rcll} x^2 - y^2 &=& a & (1) \\ 2\,x\,y &=& b & (2) \\ x^2 + y^2 &=& \sqrt{a^2+b^2} & \end{array}\right.$. Alors :

× avec l'équation (1) : $\mathrm{Re}\,\left(z^2\right) = \mathrm{Re}\,(\alpha)$,

× avec l'équation (2) : $\mathrm{Im}\,\left(z^2\right) = \mathrm{Im}\,(\alpha)$.

On en déduit : $z^2 = \alpha$.

$$\boxed{\text{Finalement : } z^2=\alpha \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 &=& a \\ 2\,x\,y &=& b \\ x^2 + y^2 &=& \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right. .}$$

□

*3.* ***a)*** Montrer que si $b>0$, alors une solution de l'équation $z^2=\alpha$ est donnée par :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

Déterminer une deuxième solution de l'équation étudiée.

*Démonstration.*
Supposons : $b>0$.
Vérifions que $z_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$ est bien solution de $(E)$ où :

$$x_0 \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \quad \text{et} \quad y_0 \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

- Tout d'abord :

$$x_0^2 - y_0^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(a+\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}-a\right) \;=\; \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,a \;=\; a$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
2\,x_0\,y_0 &= 2\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \\
&= 2\,\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \\
&= \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-a^2} \\
&= \sqrt{\cancel{a^2}+b^2-\cancel{a^2}} \\
&= b \qquad\qquad \textit{(car } b>0\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin :

$$x_0^2+y_0^2 = \frac{1}{2}\left(\cancel{a}+\sqrt{a^2+b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-\cancel{a}\right) = \frac{1}{2}\,\sqrt{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\,\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

On en déduit que $z_0 = x_0 + i\,y_0$ est bien solution de $(E)$.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{2.}}\text{, on en déduit que } z_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \text{ est solution de } z^2=\alpha.}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{1.}}\text{, } -z_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \text{ est aussi solution de } z^2=\alpha.}$$

$\square$

***b)*** Montrer que si $b<0$, alors une solution de l'équation $z^2=\alpha$ est donnée par :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

Déterminer une deuxième solution de l'équation dans ce cas.

*Démonstration.*
Supposons : $b<0$.
Vérifions que $z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$ est bien solution de $(E)$ où :

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \quad \text{et} \quad y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

- Tout d'abord :

$$x_1^2-y_1^2 = \frac{1}{2}\left(a+\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-(-1)^2\,\frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}-a\right) = \frac{1}{2}\,a+\frac{1}{2}\,a = a$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
2\,x_1\,y_1 &= 2\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\,\left(-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\right)\\
&= -2\,\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\\
&= -\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2-a^2}\\
&= -\sqrt{\cancel{a^2}+b^2-\cancel{a^2}}\\
&= -(-b) \;=\; b \qquad\qquad \textit{(car } b<0\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin :

$$x_1^2+y_1^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\cancel{a}+\sqrt{a^2+b^2}\right)+(-1)^2\,\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-\cancel{a}\right) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \;=\; \sqrt{a^2+b^2}$$

On en déduit que $z_1 = x_1 + i\,y_1$ est bien solution de $(E)$.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{2.}}\text{, on en déduit que } z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} - i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \text{ est solution de } z^2=\alpha.}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{1.}}\text{, } -z_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \text{ est aussi solution de } z^2=\alpha.}$$

□

**Commentaire**

- D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, on sait que le polynôme $Q(X) = X^2 - \alpha$ admet exactement 2 racines dans $\mathbb{C}$ (les racines sont comptés avec leur ordre de multiplicité). L'équation $z^2 = \alpha$ admet donc exactement 2 solutions dans $\mathbb{C}$. Comme on a exhibé 2 solutions distinctes à cette équation dans le cas $b > 0$ et 2 solutions distinctes dans le cas $b < 0$, on a bien toutes les solutions de $z^2 = \alpha$ dans le cas $b \neq 0$.
- Remarquons que l'énoncé ne nous fait pas déterminer les solutions de l'équations $z^2 = \alpha$ dans le cas ou $b = 0$. Traitons le.
  Deux cas se présentent :
  × si $a \geqslant 0$, alors :
  $$z^2=\alpha \quad\Leftrightarrow\quad z^2=a \quad\Leftrightarrow\quad (z=\sqrt{a} \;\;\texttt{OU}\;\; z=-\sqrt{a})$$
  Dans ce cas, les 2 solutions de l'équation $z^2 = \alpha$ sont donc : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
  × si $a < 0$, alors :
  $$z^2=\alpha \quad\Leftrightarrow\quad z^2=a \quad\Leftrightarrow\quad (z=i\,\sqrt{-a} \;\;\texttt{OU}\;\; z=-i\,\sqrt{-a})$$
  Dans ce cas, les 2 solutions de l'équation $z^2 = \alpha$ sont donc : $i\,\sqrt{-a}$ et $-i\,\sqrt{-a}$.

  On peut de plus noter que les formules trouvées dans les cas $b > 0$ et $b < 0$ sont ainsi valables dans le cas $b = 0$.

**Commentaire**

- Lorsque $b > 0$, l'énoncé demande seulement de **vérifier** que $z_0$ est solution de $z^2 = \alpha$ ($z_1$ dans le cas $b < 0$). C'est pour cela qu'on se contente de **vérifier** que $z_0$ vérifie le système $(E)$ (de même pour $z_1$). Il est en fait possible de démontrer l'équivalence suivante :

$$z^2 = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (z = z_0 \ \texttt{OU} \ z = -z_0)$$

En effet :

$$\begin{aligned}
& z^2 = \alpha \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} \\ 2\,x\,y & = & b \end{array}\right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2\,y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} - a \\ 2\,x\,y & = & b \end{array}\right. \\
\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcl} 2\,x^2 & = & a + \sqrt{a^2+b^2} \\ 2\,y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} - a \\ 2\,x\,y & = & b \end{array}\right. \\
\overset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2}}{\Longleftrightarrow} \quad & \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) \geqslant 0 \\ y^2 & = & \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right) \geqslant 0 \\ 2\,x\,y & = & b \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y & = & \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \\ 2\,x\,y & = & b > 0 \end{array}\right. \ \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y & = & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \\ 2\,x\,y & = & b > 0 \end{array}\right. \\
& \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y & = & \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \\ 2\,x\,y & = & b > 0 \end{array}\right. \ \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y & = & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \\ 2\,x\,y & = & b > 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y & = & \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \end{array}\right. \ \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y & = & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & z = z_0 \ \texttt{OU} \ z = -z_0
\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on démontre que, dans le cas $b < 0$ :

$$z^2 = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (z = z_1 \ \texttt{OU} \ z = -z_1)$$

***4.*** À l'aide de la question ***2.***, déterminer tous les nombres complexes tels que :

***a)*** $z^2 = 2\,i$  ***b)*** $z^2 = 3 - 4\,i$

*Démonstration.*

***a)*** Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. D'après la question ***2.*** :

$$
\begin{aligned}
& z^2 = 2\,i \\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \\ 2\,x\,y = 2 \end{cases} \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}\quad & \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2\,y^2 = 2 \\ 2\,x\,y = 2 \end{cases} \\
\overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}}{\Longleftrightarrow}\quad & \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 = 1 \\ x\,y = 1 \end{cases} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow}\quad & \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ x\,y = 1 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x\,y = 1 > 0 \end{cases} \ \texttt{OU}\ \cancel{\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x\,y = 1 > 0 \end{cases}} \\
& \texttt{OU}\ \cancel{\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ x\,y = 1 > 0 \end{cases}} \ \texttt{OU}\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ x\,y = 1 > 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \ \texttt{OU}\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\quad & z = 1 + i \times 1 \ \ \texttt{OU}\ \ z = -1 + i \times (-1)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble } \mathcal{S} \text{ des solutions de l'équation } z^2 = 2\,i \text{ est } \{1 + i, -1 - i\}.}$$

**Commentaire**

L'énoncé nous fait ici déterminer les racines carrées du nombre complexe $2\,i$ (et de $3 - 4\,i$ dans la question suivante). On pourra se reporter au cours pour un $3^{\text{ème}}$ exemple de recherche de racines carrées d'un nombre complexe.

***b)*** Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + i\,y$. D'après la question ***2.*** :

$$
\begin{array}{cl}
 & z^2 = 3 - 4\,i \\[1em]
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccccccc} x^2 & - & y^2 & = & 3 & & \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{3^2 + (-4)^2} & = & 5 \\ & 2\,x\,y & & = & -4 & & \end{array}\right. \\[2em]
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & 3 \\ & & 2\,y^2 & = & 2 \\ & 2\,x\,y & & = & -4 \end{array}\right. \\[2em]
\overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & 3 \\ & & y^2 & = & 1 \\ & x\,y & & = & -2 \end{array}\right. \\[2em]
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{ccc} x^2 & = & 4 \\ y^2 & = & 1 \\ x\,y & = & -2 \end{array}\right. \\[2em]
\Longleftrightarrow & \cancel{\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & 1 \\ x\,y & = & -2 < 0 \end{array}\right.} \ \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ x\,y & = & -2 < 0 \end{array}\right. \\[2em]
 & \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2 \\ y & = & 1 \\ x\,y & = & -2 < 0 \end{array}\right. \ \texttt{OU} \ \cancel{\left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2 \\ y & = & -1 \\ x\,y & = & -2 < 0 \end{array}\right.} \\[2em]
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & -1 \end{array}\right. \ \texttt{OU} \ \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \\[1.5em]
\Longleftrightarrow & z = 2 + i \times (-1) \ \texttt{OU} \ z = -2 + i \times 1
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble } \mathcal{S} \text{ des solutions de l'équation } z^2 = 3 - 4\,i \text{ est } \{2 - i, -2 + i\}.}$$

□

## Partie B : Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$.

***5.*** Montrer que résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ équivaut à résoudre l'équation $a\left(z + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\,a} = 0$ en posant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

**Commentaire**

L'énoncé initial précisait : $\Delta = b^2 - a\,c$. Il s'agit bien évidemment d'une coquille. Le complexe $\Delta$ désigne ici le discriminant du polynôme $P$ défini par : $P(X) = a\,X^2 + b\,X + c$. Il prend donc bien la valeur : $b^2 - 4\,a\,c$.

*Démonstration.*
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\,a} &= a\left(z^2+\cancel{2}\,\frac{b}{\cancel{2}\,a}\,z+\left(\frac{b}{2\,a}\right)^2\right)-\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a}\\
&= a\,z^2+\cancel{a}\,\frac{b}{\cancel{a}}\,z+a\,\frac{b^2}{4\,a^2}-\frac{4\,a\,c}{4\,a}\\
&= a\,z^2+b\,z+\cancel{\frac{b^2}{4\,a}}-\cancel{\frac{b^2}{4\,a}}+c\\
&= a\,z^2+b\,z+c
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } a\,z^2+b\,z+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\,a}=0.}$$

□

***6.*** Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$.
Montrer que les solutions de l'équation $a\,z^2+b\,z+c=0$ sont données par $\dfrac{-b-\delta}{2\,a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2\,a}$.

*Démonstration.*
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
a\,z^2+b\,z+c=0 &\Leftrightarrow a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\,a}=0 && \textit{(d'après la question précédente)}\\
&\Leftrightarrow a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2=\frac{\Delta}{4\,a}\\
&\Leftrightarrow 4\,a^2\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2=\Delta\\
&\Leftrightarrow \left(2\,a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)\right)^2=\delta^2 && \textit{(par définition de } \delta\textit{)}\\
&\Leftrightarrow 2\,a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)=\delta \ \texttt{OU}\ 2\,a\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)=-\delta\\
&\Leftrightarrow z+\frac{b}{2\,a}=\frac{\delta}{2\,a} \ \texttt{OU}\ z+\frac{b}{2\,a}=-\frac{\delta}{2\,a}\\
&\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2\,a}+\frac{\delta}{2\,a} \ \texttt{OU}\ z=-\frac{b}{2\,a}-\frac{\delta}{2\,a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{S} \text{ des solutions de l'équation } a\,z^2+b\,z+c=0 \text{ est donc : } \mathcal{S}=\left\{\frac{-b+\delta}{2\,a},\frac{-b-\delta}{2\,a}\right\}.}$$

□

*7.* **Application** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (3\,i - 4)\,z + 1 - 7\,i \;=\; 0$$

*Démonstration.*

- On note $\Delta$ le discriminant du polynôme : $P(X) = X^2 + (3\,i - 4)\,X + 1 - 7\,i$. Alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= (3\,i - 4)^2 - 4 \times 1 \times (1 - 7\,i) \\ &= (3\,i)^2 - 24\,i + 16 - 4 + 28\,i \\ &= -9 + 12 + 4\,i \;=\; 3 + 4\,i \end{aligned}$$

- D'après la question précédente, on sait que les solutions de l'équation $z^2 + (3\,i - 4)\,z + 1 - 7\,i = 0$ sont données par :

$$z_1 \;=\; \frac{-(3\,i - 4) + \delta}{2 \times 1} \;=\; \frac{4 - 3\,i + \delta}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 \;=\; \frac{-(3\,i - 4) - \delta}{2 \times 1} \;=\; \frac{4 - 3\,i - \delta}{2}$$

  où $\delta$ est une solution de l'équation $z^2 = \Delta = 3 + 4\,i$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On remarque :

$$z^2 = 3 + 4\,i \;\Leftrightarrow\; \overline{(z^2)} = \overline{3 + 4\,i} \;\Leftrightarrow\; (\overline{z})^2 = 3 - 4\text{ß}$$

  Or, d'après la question ***4.b)***, le complexe $2 - i$ est solution de $z^2 = 3 - 4\,i$. On en déduit que le complexe $\overline{2 - i} = 2 + i$ est solution de l'équation $z^2 = 3 + 4\,i$.

$$\boxed{\text{On choisit donc : } \delta = 2 + i.}$$

**Commentaire**

- Dans ce point, on a en fait démontré l'équivalence suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 = \alpha \;\Leftrightarrow\; (\overline{z})^2 = \overline{\alpha}$$

  Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z$ est solution de $z^2 = \alpha$ si et seulement si $\overline{z}$ est solution de $z^2 = \overline{\alpha}$.

- On pouvait aussi se servir de la question ***3.a)***. En effet, d'après celle-ci, une solution de l'équation $z^2 = 3 + 4\,i$ est :

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3^2 + 4^2}\right)} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3^2 + 4^3} - 3\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\,(3 + 5)} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}\,(5 - 3)} \\ &= \sqrt{4} + i\,\sqrt{1} \;=\; 2 + i \end{aligned}$$

- Ainsi :
  - × $z_1 \;=\; \dfrac{4 - 3\,i + (2 - i)}{2} \;=\; \dfrac{2 - 4\,i}{2} \;=\; 1 - 2\,i$
  - × $z_2 \;=\; \dfrac{4 - 3\,i - (2 - i)}{2} \;=\; \dfrac{6 - 2\,i}{2} \;=\; 3 - i$

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{S} \text{ des solutions de l'équation d'intérêt est : } \mathcal{S} = \{1 - 2\,i, 3 - i\}.}$$

□

## Exercice 125 p.113 (*Manuel Mathématiques Expertes - Le Livre Scolaire*)

Le but de cet exercice est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

***1.*** Soit $a \in \mathbb{N}$. Reproduire et compléter le tableau de congruence modulo 5 afin de déterminer les restes de la division euclidienne de $a^2$ par 5.

| $a \equiv \cdots\ [5]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^2 \equiv \cdots\ [5]$ | | | | | |

*Démonstration.*
On obtient le tableau suivant :

| $a \equiv \cdots\ [5]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a^2 \equiv \cdots\ [5]$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |

Détaillons 2 cas :

- si $a \equiv 3\ [5]$, alors : $a^2 \equiv 9\ [5]$.
  Or : $9 \equiv 4\ [5]$. Ainsi, par transitivité de la congruence : $a^2 \equiv 4\ [5]$.
- si $a \equiv 4\ [5]$, alors : $a^2 \equiv 16\ [5]$.
  Or : $16 \equiv 1\ [5]$. Ainsi, par transitivité de la congruence : $a^2 \equiv 1\ [5]$. □

***2.*** Soit $b \in \mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $3\,b^2$ par 5.

*Démonstration.*
On effectue un tableau similaire à celui de la question précédente.

| $b \equiv \cdots\ [5]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b^2 \equiv \cdots\ [5]$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |
| $3b^2 \equiv \cdots\ [5]$ | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 |

Détaillons le cas : $b \equiv 3\ [5]$.
Supposons : $b \equiv 3\ [5]$. Alors, d'après la question précédente : $b^2 \equiv 4\ [5]$. Ainsi : $3b^2 \equiv 12\ [5]$.
Or : $12 \equiv 2\ [5]$. Ainsi, par transitivité de la congruence : $3b^2 \equiv 2\ [5]$. □

***3.*** En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

*Démonstration.*
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $\sqrt{3}$ est rationnel. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que : $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$.

- Tout d'abord :
  - × comme $\sqrt{3} \geqslant 0$, on peut considérer : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ (quitte à remplacer $a$ par $-a$ et $b$ par $-b$).
  - × comme $\sqrt{3} \neq 0$, alors : $a \neq 0$.
  - × quitte à simplifier la fraction $\dfrac{a}{b}$, on la suppose également irréductible.

  Finalement on considère $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $\dfrac{a}{b}$ irréductible.

- De plus :
$$\begin{aligned} &\sqrt{3} = \frac{a}{b} \\ \text{donc} \quad &\sqrt{3}\ b = a \\ \text{d'où} \quad &(\sqrt{3}\ b)^2 = a^2 \\ \text{ainsi} \quad &3\,b^2 = a^2 \end{aligned}$$
En particulier : $3\,b^2 \equiv a^2\ [5]$.
- D'après les tableaux des questions ***1.*** et ***2.***, on obtient :
$$3\,b^2 \equiv 0\ [5] \qquad \text{et} \qquad a^2 \equiv 0\ [5]$$
Alors, d'après ces mêmes tableaux :
$$b \equiv 0\ [5] \qquad \text{et} \qquad a \equiv 0\ [5]$$
Autrement dit : $5 \mid b$ et $5 \mid a$.

Absurde ! En effet : $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $\dfrac{a}{b}$ est irréductible.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.}$$
□