DM2

Exercice 150 p.47 (*Manuel Mathématiques Expertes - Le Livre Scolaire*)

Partie A : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit $\alpha = a + i\,b$ un nombre complexe, où a et b sont réels. On cherche à déterminer s'il existe un nombre complexe z tel que : $z^2 = \alpha$.
On pose $z = x + i\,y$, où x et y sont deux réels.

1. Montrer que si z est une solution de l'équation $z^2 = \alpha$, alors il en est de même de $-z$.

2. Montrer que z est solution de $z^2 = \alpha$ si et seulement si x et y vérifient le système suivant :

$$(E)\ \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2\,x\,y & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

3. ***a)*** Montrer que si $b > 0$, alors une solution de l'équation $z^2 = \alpha$ est donnée par :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)}$$

Déterminer une deuxième solution de l'équation étudiée.

b) Montrer que si $b < 0$, alors une solution de l'équation $z^2 = \alpha$ est donnée par :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} - i\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)}$$

Déterminer une deuxième solution de l'équation dans ce cas.

4. À l'aide de la question ***2.***, déterminer tous les nombres complexes tels que :

a) $z^2 = 2\,i$ ***b)*** $z^2 = 3 - 4\,i$

Partie B : Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$.

5. Montrer que résoudre l'équation $az^2+bz+c = 0$ équivaut à résoudre l'équation $a\left(z + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\,a} = 0$ en posant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

Commentaire

L'énoncé initial précisait : $\Delta = b^2 - a\,c$. Il s'agit bien évidemment d'une coquille. Le complexe Δ désigne ici le discriminant du polynôme P défini par : $P(X) = a\,X^2 + b\,X + c$. Il prend donc bien la valeur : $b^2 - 4\,a\,c$.

6. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
Montrer que les solutions de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ sont données par $\dfrac{-b-\delta}{2\,a}$ et $\dfrac{-b+\delta}{2\,a}$.

7. **Application** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + (3\,i - 4)\,z + 1 - 7\,i \;=\; 0$$

Exercice 125 p.113 (*Manuel Mathématiques Expertes - Le Livre Scolaire*)

Le but de cet exercice est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Reproduire et compléter le tableau de congruence modulo 5 afin de déterminer les restes de la division euclidienne de a^2 par 5.

$a \equiv \cdots \ [5]$	0	1	2	3	4
$a^2 \equiv \cdots \ [5]$					

2. Soit $b \in \mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de $3\,b^2$ par 5.

3. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.