DM1

Exercice 129 p.114 (*Manuel Mathématiques Expertes - Le Livre Scolaire*)

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 = z^2$. Ces triplets sont appelés **triplets pythagoriciens**, en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car : $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Partie A : Généralités

1. Soient $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que si (x, y, z) est un TP, alors $(p\,x, p\,y, p\,z)$ est aussi un TP.

Démonstration.
Supposons que (x, y, z) est un TP.
Alors : $x^2 + y^2 = z^2$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} (p\,x)^2 + (p\,y)^2 & = & p^2\,x^2 + p^2\,y^2 & \\ & = & p^2\,(x^2 + y^2) & \\ & = & p^2\,z^2 & \textit{(car } (x,y,z) \textit{ est un TP)} \\ & = & (p\,z)^2 & \end{array}$$

On en conclut que $(p\,x, p\,y, p\,z)$ est un TP.

$$\boxed{\text{Finalement, si } (x, y, z) \text{ est un TP, alors } (p\,x, p\,y, p\,z) \text{ est un TP.}}$$

□

2. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
Démontrer que si (x, y, z) est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

Démonstration.
Supposons que (x, y, z) est un TP.
Raisonnons alors par l'absurde.
Supposons que x, y et z sont tous impairs.

- <u>Méthode 1</u> : utilisation de la division euclidienne.
  Alors il existe $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ tel que :

$$x \;=\; 2\,k_1 + 1, \quad y \;=\; 2\,k_2 + 1 \quad \text{et} \quad z \;=\; 2\,k_3 + 1$$

  On en déduit :
  × d'une part :

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & (2\,k_1 + 1)^2 + (2\,k_2 + 1)^2 \\ & = & 4\,k_1^2 + 4\,k_1 + 1 + 4\,k_2^2 + 4\,k_2 + 1 \\ & = & 2\,\left(2\,k_1^2 + 2\,k_1 + 2\,k_2^2 + 2\,k_2 + 1\right) \end{array}$$

  En posant $k = 2\,k_1^2 + 2\,k_1 + 2\,k_2^2 + 2\,k_2 + 1 \in \mathbb{N}$, on obtient : $x^2 + y^2 = 2\,k$.
  D'où $x^2 + y^2$ est pair.

× d'autre part :

$$z^2 = (2\,k_3+1)^2 = 4\,k_3^2+4\,k_3+1 = 2\left(2\,k_3^2+2\,k_3\right)+1$$

En posant $k' = 2\,k_3^2+2\,k_3 \in \mathbb{N}$, on obtient : $z^2 = 2\,k'+1$.
Donc z^2 est impair.

Absurde ! En effet, comme (x, y, z) est un TP : $x^2+y^2 = z^2$.

- Méthode 2 : utilisation des congruences.
  Alors :

$$x \equiv 1\,[2], \quad y \equiv 1\,[2] \quad \text{et} \quad z \equiv 1\,[2]$$

On en déduit (par compatibilité des congruences avec l'exponentiation entière) : $x^2 \equiv 1^2\,[2]$. D'où : $x^2 \equiv 1\,[2]$.
De même : $y^2 \equiv 1\,[2]$ et $z^2 \equiv 1\,[2]$. On obtient :

× d'une part : $x^2+y^2 \equiv 2\,[2]$ (par compatibilité des congruences avec l'addition). Or : $2 \equiv 0\,[2]$.
Ainsi, par transitivité :

$$x^2+y^2 \equiv 0\,[2]$$

× d'autre part : $z^2 \equiv 1\,[2]$.

Absurde ! En effet, comme (x, y, z) est un TP : $x^2+y^2 = z^2$.

Finalement, si (x, y, z) est un TP, alors x, y et z ne sont pas tous impairs.

Commentaire

- Rappelons le schéma de démonstration par l'absurde.

Démo de v par l'absurde

```
Par l'absurde, on suppose que NON(v) est vraie.
Alors ...
Absurde !
Ce qui démontre v.
```

- Il s'agit donc bien dans cette question de supposer « NON(x, y et z ne sont pas tous impairs) », c'est-à-dire « x, y et z sont tous impairs ».

□

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire de façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^{\alpha} \times k$, où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair. L'écriture $n = 2^{\alpha} \times k$ sera dénommée décomposition de n dans la suite du problème.
Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 :

$$9 = 2^0 \times 9 \qquad \text{et} \qquad 120 = 2^3 \times 15$$

Démonstration.
Ce n'était pas demandé par l'énoncé mais démontrons que la décomposition proposée est bien unique.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $(\alpha_1, \alpha_2, k_1, k_2) \in \mathbb{N}^4$ tel que k_1 et k_2 sont impairs et :

$$\left\{\begin{array}{rcl} n & = & 2^{\alpha_1} \times k_1 \\ n & = & 2^{\alpha_2} \times k_2 \end{array}\right.$$

Alors : $2^{\alpha_1} \times k_1 = 2^{\alpha_2} \times k_2$.

Raisonnons alors par l'absurde pour démontrer : $\alpha_1 = \alpha_2$.
Supposons : $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Deux cas se présentent alors.

- si $\alpha_1 < \alpha_2$, on sait déjà :

$$\begin{array}{lrcl} & 2^{\alpha_1} \times k_1 & = & 2^{\alpha_2} \times k_2 \\ \text{donc} & k_1 & = & \dfrac{2^{\alpha_2}}{2^{\alpha_1}} \times k_2 \\ \text{d'où} & k_1 & = & 2^{\alpha_2 - \alpha_1} \times k_2 \end{array}$$

  Comme $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ et $k_2 \in \mathbb{N}$, on en déduit que $k_1 = 2^{\alpha_2 - \alpha_1} \times k_2$ est pair.
  Absurde ! En effet, l'entier k_1 est impair.

- si $\alpha_1 > \alpha_2$, on sait déjà :

$$\begin{array}{lrcl} & 2^{\alpha_1} \times k_1 & = & 2^{\alpha_2} \times k_2 \\ \text{donc} & \dfrac{2^{\alpha_1}}{2^{\alpha_2}} \times k_1 & = & k_2 \\ \text{d'où} & 2^{\alpha_1 - \alpha_2} \times k_1 & = & k_2 \end{array}$$

  Comme $\alpha_1 - \alpha_2 > 0$ et $k_1 \in \mathbb{N}$, on en déduit que $k_2 = 2^{\alpha_2 - \alpha_1} \times k_2$ est pair.
  Absurde ! En effet, l'entier k_2 est impair.

On en déduit : $\alpha_1 = \alpha_2$. D'où :

$$\begin{array}{lrcl} & 2^{\alpha_1} \times k_1 & = & 2^{\alpha_1} \times k_2 \\ \text{donc} & k_1 & = & k_2 \end{array}$$

Finalement : $\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \alpha_2 \\ k_1 & = & k_2 \end{array} \right.$. La décomposition proposée par l'énoncé est donc unique.

Commentaire

On pourra retenir cette méthode. Pour démontrer l'unicité d'un objet x vérifiant une propriété $\mathcal{P}$:

1) on introduit deux objets vérifiant $\mathcal{P}$: soit $(x_1, x_2) \in E^2$ vérifiant $\mathcal{P}$.

2) on démontre par implication : $x_1 = x_2$.

C'est par exemple comme cela que l'on démontre l'unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne. □

a) Donner la décomposition de l'entier 192.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La décomposition de 192 est : } 192 = 2^6 \times 3.}$$

Commentaire

Pour trouver cette décomposition, on effectue les divisions successives de 192 par 2 jusqu'à que ce ne soit plus possible :

$$\begin{array}{rcl} 192 & = & 2 \times 96 \\ & = & 2 \times (2 \times 48) \ = \ 2^2 \times 48 \\ & = & 2^2 \times (2 \times 24) \ = \ 2^3 \times 24 \\ & = & 2^3 \times (2 \times 12) \ = \ 2^4 \times 12 \\ & = & 2^4 \times (2 \times 6) \ = \ 2^5 \times 6 \\ & = & 2^5 \times (2 \times 3) \ = \ 2^6 \times 3 \end{array}$$

□

b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls dont les décompositions sont $x = 2^{\alpha} \times k$ et $z = 2^{\beta} \times m$. Écrire la décomposition des entiers naturels $2\,x^2$ et z^2.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$2\,x^2 \;=\; 2\,\left(2^{\alpha} \times k\right)^2 \;=\; 2\,\left(2^{2\,\alpha} \times k^2\right) \;=\; 2^{2\,\alpha+1} \times k^2$$
En notant $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha' & = & 2\,\alpha + 1 \\ k' & = & k^2 \end{array}\right.$, alors :
  - × $(\alpha', k') \in \mathbb{N}^2$,
  - × k' impair,
    *(on a en effet déjà démontré en question **2.** que le carré d'un entier naturel impair est encore un entier naturel impair.)*
  - × $2\,x^2 = 2^{\alpha'} \times k'$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la décomposition de } 2\,x^2 \text{ est : } 2\,x^2 = 2^{2\,\alpha+1} \times k^2.}$$

- Ensuite :
$$z^2 \;=\; \left(2^{\beta} \times m\right)^2 \;=\; 2^{2\,\beta} \times m^2$$
En notant $\left\{\begin{array}{lcl} \beta' & = & 2\,\beta \\ m' & = & m^2 \end{array}\right.$, alors :
  - × $(\beta', m') \in \mathbb{N}^2$,
  - × m' impair,
  - × $z^2 = 2^{\beta'} \times m'$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la décomposition de } z^2 \text{ est : } z^2 = 2^{2\,\beta} \times m^2.}$$

□

c) En examinant l'exposant 2 dans la décomposition de $2\,x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2\,x^2 = z^2$.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe $(x, z) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : $2\,x^2 = z^2$.
Comme $(x, z) \in (\mathbb{N}^*)^2$, d'après l'avant-propos de la question ***3.***, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ et $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que k et m soient impairs vérifiant :

$$x \;=\; 2^{\alpha} \times k \qquad \text{et} \qquad z \;=\; 2^{\beta} \times m$$

On déduit, avec la question ***3.b)*** :

$$2\,x^2 \;=\; 2^{2\,\alpha+1} \times k^2 \qquad \text{et} \qquad z^2 \;=\; 2^{2\,\beta} \times m^2$$

Ainsi, comme $2\,x^2 = z^2$, on en déduit que $2^{2\,\alpha+1} \times k^2$ et $2^{2\,\beta} \times m$ sont deux décompositions de z^2 (et de $2\,x^2$).
Or, d'après l'énoncé, une telle décomposition est unique. On en déduit en particulier :

$$2\,\alpha + 1 \;=\; 2\,\beta$$

Absurde ! En effet, comme $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, l'entier $2\,\alpha + 1$ est impair et l'entier $2\,\beta$ est pair.

$$\boxed{\text{Finalement, il n'existe pas de couple } (x, z) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que : } 2\,x^2 = z^2.}$$

□

On admet que la question ***3.*** (de la **Partie A**) permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus, les entiers naturels x et y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP (x, y, z), les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Démonstration.
Démontrons le résultat admis par l'énoncé : les trois entiers x, y et z sont deux à deux distincts.
Soit (x, y, z) un TP.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que x, y et z ne sont pas deux à deux distincts. Trois cas se présentent alors.

- si $x = y$, alors :

$$\begin{array}{rcll} z^2 & = & x^2 + y^2 & \textit{(car } (x,y,z) \textit{ est un TP)} \\ & = & 2\,x^2 & \textit{(car } x = y\textit{)} \end{array}$$

  Absurde d'après la question ***3.c)*** !

- si $x = z$, alors :

$$\begin{array}{rcll} y^2 & = & z^2 - x^2 & \textit{(car } (x,y,z) \textit{ est un TP)} \\ & = & 0 & \textit{(car } x = z\textit{)} \end{array}$$

  Absurde car $y \in \mathbb{N}^*$!

- si $y = z$, alors :

$$\begin{array}{rcll} x^2 & = & z^2 - y^2 & \textit{(car } (x,y,z) \textit{ est un TP)} \\ & = & 0 & \textit{(car } y = z\textit{)} \end{array}$$

  Absurde car $x \in \mathbb{N}^*$!

Les trois cas aboutissent à une contradiction.
On en déduit que x, y et z sont deux à deux distincts. □

Partie B : Recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

4. Sachant que $2015 = 5 \times 403$ et en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.

Démonstration.

- D'après le préambule, $(3, 4, 5)$ est un TP.
- Ainsi, d'après la question ***2.***, comme $403 \in \mathbb{N}^*$, le triplet $(403 \times 3,\ 403 \times 4,\ 403 \times 5)$ est un TP.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (1209,\ 1612,\ 2015) \text{ est un TP.}}$$

□

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 \;=\; (2n^2+2n+1)^2$$

Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $2015 = 2 \times 1007 + 1$.
- On applique alors le résultat admis dans cette question à $n = 1007$. On obtient :

$$\underbrace{(2 \times 1007 + 1)^2}_{=\,(2015)^2} \;+\; \underbrace{\left(2 \times (1007)^2 + 2 \times 1007\right)^2}_{=\,(2030112)^2} \;=\; \underbrace{\left(2 \times (1007)^2 + 2 \times 1007 + 1\right)^2}_{=\,(2030113)^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (2015,\ 2030112,\ 2030113) \text{ est un TP.}}$$

Commentaire

On peut facilement démontrer le résultat admis par l'énoncé.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part :

$$\begin{array}{rcl} (2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 & = & 4n^2+4n+1+4n^4+8n^3+4n^2 \\ & = & 4n^4+8n^3+8n^2+4n+1 \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} (2n^2+2n+1)^2 & = & 4n^4+4n^2+1+8n^3+4n^2+4n \\ & = & 4n^4+8n^3+8n^2+4n+1 \end{array}$$

On a donc bien :

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 \ = \ (2n^2+2n+1)^2$$

□

6. a) En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls (x,z) tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

Démonstration.

- Soit $(x,z) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$z^2 - x^2 = 403^2 \ \Leftrightarrow \ (z-x) \times (z+x) = 169 \times 961$$

- On cherche alors un couple $(x,z) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} z & - & x & = & 169 \\ z & + & x & = & 961 \end{array} \right.$$

Soit $(x,z) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} z & - & x & = & 169 \\ z & + & x & = & 961 \end{array} \right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & - & x & = & 169 \\ & & 2\,x & = & 792 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,z & & & = & 1130 \\ & & 2\,x & = & 792 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} z & & & = & 565 \\ & & x & = & 396 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi le couple } (396, 565) \text{ vérifie bien les données de l'énoncé.}}$$

□

b) En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.

Démonstration.

- On déduit de la question ***6.a)*** : $565^2 - 396^2 = 403^2$. Donc : $396^2 + 403^2 = 565^2$.
D'où (396, 403, 565) est un TP.
- On rappelle que, d'après ***4.*** : $2015 = 5 \times 403$.
Ainsi, d'après ***2.***, le triplet $(5 \times 396,\ 5 \times 403,\ 5 \times 565)$ est un TP.

$$\boxed{\text{On en déduit } (1980,\ 2015,\ 2825) \text{ est un TP.}}$$

□