# DM1

## Exercice 129 p.114 (*Manuel Mathématiques Expertes - Le Livre Scolaire*)

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x, y, z)$ tels que : $x^2+y^2=z^2$.
Ces triplets sont appelés **triplets pythagoriciens**, en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi $(3, 4, 5)$ est un TP car : $3^2+4^2=5^2$.

### Partie A : Généralités

***1.*** Soient $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que si $(x, y, z)$ est un TP, alors $(p\,x, p\,y, p\,z)$ est aussi un TP.

***2.*** Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
Démontrer que si $(x, y, z)$ est un TP, alors les entiers naturels $x$, $y$ et $z$ ne peuvent pas être tous les trois impairs.

***3.*** Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul $n$ peut s'écrire de façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair : $n = 2^\alpha \times k$, où $\alpha$ est un entier naturel (éventuellement nul) et $k$ un entier naturel impair. L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ sera dénommée décomposition de $n$ dans la suite du problème.
Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 :

$$9 = 2^0 \times 9 \qquad \text{et} \qquad 120 = 2^3 \times 15$$

***a)*** Donner la décomposition de l'entier 192.

***b)*** Soient $x$ et $z$ deux entiers naturels non nuls dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
Écrire la décomposition des entiers naturels $2\,x^2$ et $z^2$.

***c)*** En examinant l'exposant 2 dans la décomposition de $2\,x^2$ et dans celle de $z^2$, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x, z)$ tels que $2\,x^2 = z^2$.

On admet que la question ***3.*** (de la **Partie A**) permet d'établir que les trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ sont deux à deux distincts. Comme de plus, les entiers naturels $x$ et $y$ jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x, y, z)$, les trois entiers naturels $x$, $y$ et $z$ seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

### Partie B : Recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

***4.*** Sachant que $2015 = 5 \times 403$ et en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x, y, 2015)$.

***5.*** On admet que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$$

Déterminer un TP de la forme $(2015, y, z)$.

***6.*** ***a)*** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x, z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.

***b)*** En déduire un TP de la forme $(x, 2015, z)$.