Variables aléatoires à densité

I. Variables aléatoires à densité

I.1. Rappels sur les fonctions de répartition

Définition (Fonction de répartition)
Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \mathbb{P}([X \leqslant x])$$

Proposition 1.
Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. X si et seulement si :

1. *F est croissante sur $\mathbb{R}$;*
2. *F est continue à droite en tout point ;*
3. *F admet une limite à gauche en tout point ;*
4. *F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

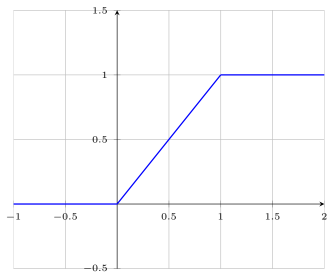
I.2. Variables aléatoires à densité

Définition (Variable aléatoire à densité)
On dit que X est une *variable aléatoire à densité* si sa fonction de répartition F_X vérifie :

1. F_X est continue sur $\mathbb{R}$
2. F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple
Soit X la v.a.r. de fonction de répartition F_X définie par :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$



La fonction F_X est :

- continue sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 2 points : 0 et 1.

X est donc une v.a.r. à densité.

I.3. Densité

Définition (Densité)
Soit X une v.a.r. à densité et F_X sa fonction de répartition.
Alors, toute fonction f positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = F_X'(x)$ pour tout x où F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ est appelée une *densité* de X.

`MÉTHODO`

Connaissant la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. à densité X, on obtient donc une densité de X en dérivant F_X en tout point où elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc sur des intervalles **ouverts**) et en donnant une valeur arbitraire ailleurs.

Exercice 1
On note Z une v.a.r. de fonction de répartition définie par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

1. Vérifier que Z est une v.a.r. à densité.

2. Déterminer une densité de Z.

Démonstration.

1. • La fonction F est continue :
- × sur $]-\infty, 2[$ en tant que fonction constante,
- × sur $]2, +\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions continue sur $]2, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle,
- × en 2. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = 0$.
  D'autre part : $\lim\limits_{x \to 2^+} F(x) = F(2) = 0$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to 2^-} F(x) \ = \ F(2) \ = \ \lim_{x \to 2^+} F(x)$$

On en déduit que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

• La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.
La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 2.

On en déduit que Z est une v.a.r. à densité.

2. Pour déterminer une densité f de Z, on dérive F sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x \in \,]-\infty, 2[$.
$$f(x) \ = \ F'(x) \ = \ 0$$

• Si $x \in \,]2, +\infty[$.
$$f(x) \ = \ F'(x) \ = \ \frac{24}{x^4}$$

• On choisit enfin : $f(2) = 0$.

Ainsi, une densité f de Z est : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{24}{x^4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

□

Commentaire

Une v.a.r. X admet une infinité de densités qui ne diffèrent que par un nombre fini de points.

⚠ Une v.a.r. n'est pas forcément discrète ou à densité !

Exercice 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.

2. Représenter graphiquement cette fonction de répartition.

3. Y est-elle une v.a.r. à densité ?

Démonstration.

1. • Notons $h : x \mapsto \max(1, x)$, de sorte que $Y = h(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $X(\Omega) =]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) & \\ & = & h(]0, +\infty[) & \\ & \subset & [1, +\infty[& \textit{(par définition de } h\textit{)} \end{array}$$

Donc $Y(\Omega) \subset [1, +\infty[$.

• Déterminons la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [1, +\infty[$. On a alors :

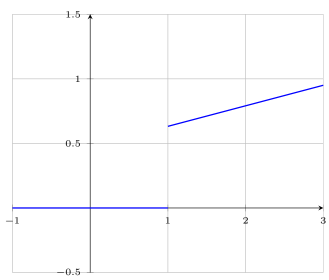
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant 1$, on a :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\max(1, X) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([1 \leqslant x] \cap [X \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \textit{(car } [1 \leqslant x] = \Omega \textit{ si } x \geqslant 1\textit{)} \\ & = & F_X(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \end{array}$$

Finalement, $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

2.



3. La fonction de répartiton de Y, F_Y n'est pas continue en 1. Donc Y n'est pas une v.a.r. à densité.

□

Exercice 3
Soit X une v.a.r. admettant une fonction paire f pour densité. On définit la v.a.r. Y par

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

Montrer que la v.a.r. Y n'est ni une v.a.r. à densité, ni une v.a.r. discrète.

Démonstration.

- Par définition de la v.a.r. Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- Déterminons la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc on a :
  $$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  - Si $x \geqslant 0$.
  On applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements : $([X \leqslant 0], [X > 0])$.
  $$\begin{array}{rcl} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ & = & \mathbb{P}([0 \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) \\ & = & \cancel{F(0)} + \left(F(x) - \cancel{F(0)}\right) \ = \ F(x) \end{array}$$
  Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} F(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- Démontrons que F_Y n'est pas continue en 0.
  × D'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$.
  × D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = F(0)$. Or, comme une densité f de X est paire, alors $F(0) = \dfrac{1}{2}$ (à démontrer !).
  Ainsi :
  $$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) \neq \lim_{x \to 0^+} F_Y(x)$$
  La fonction F_Y n'est donc pas continue en 0. Ainsi Y n'est pas une v.a.r. à densité.
- La fonction F_Y n'est pas constante par morceaux, donc Y n'est pas une v.a.r. discrète. □

Théorème 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

- *f est positive sur $\mathbb{R}$.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
- *$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.*

Alors il existe une v.a.r. X telle que f soit une densité de la v.a.r. X.
On dit alors que f est une densité de probabilité.

Proposition 2.
Si f_X est une densité d'une v.a.r. X, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

I.4. Formules de calcul

Proposition 3.
Soit X une v.a.r. admettant une densité f_X. On note F_X sa fonction de répartition.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*
$$\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt = F_X(x) \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}([X \geqslant x]) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1 - F_X(x)$$
- *Pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$, on a :*
$$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) = \int_{a}^{b} f_X(t)\ dt = F_X(b) - F_X(a)$$
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :*
$$\mathbb{P}([X = a]) = 0$$
- *Si f_X est nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$, alors :*
$$F_X(a) = \mathbb{P}([X \leqslant a]) = 0 \quad \textit{et} \quad F_X(b) = \mathbb{P}([X \leqslant b]) = 1$$
On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a, b]$: $X(\Omega) = [a, b]$.

Preuve.

- D'après la proposition précédente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt = F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$.
$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_X(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt & \\
& = & 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt & \textit{(d'après le Théorème 2)} \\
& = & 1 - F_X(x) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}(\overline{[X \leqslant x]}) \ = \ \mathbb{P}([X > x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X \geqslant x]) & \textit{(car } F_X \textit{ est continue en } x\textit{)}
\end{array}$$
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$.
$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) & = & \mathbb{P}([a \leqslant X] \cap [X \leqslant b]) & \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant b]) - \mathbb{P}(\overline{[a \leqslant X]} \cap [X \leqslant b]) & \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant b]) - \mathbb{P}([X < a] \cap [X \leqslant b]) & \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant b]) - \mathbb{P}([X < a]) & \textit{(car } a \leqslant b\textit{)} \\
& = & F_X(b) - F_X(a) & \textit{(car } F_X \textit{ continue en } a\textit{)}
\end{array}$$
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X = a]) & = & \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap [X < a]) & \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant a]) - \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap \overline{[X \geqslant a]}) & \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant a]) - \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap [X < a]) & \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant a]) - \mathbb{P}([X < a]) & \\
& = & F_X(a) - F_X(a) & \textit{(car } F_X \textit{ est continue en } a\textit{)} \\
& = & 0 &
\end{array}$$

- On a d'abord :

$$\begin{array}{rcll} F_X(a) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\ dt & \\ & = & 0 & \textit{(car } f_X \textit{ est nulle sur }]-\infty, a[\textit{)} \end{array}$$

On a ensuite :

$$\begin{array}{rcll} F_X(b) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f_X(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt & \textit{(car } f_X \textit{ est nulle sur }]b, +\infty[\textit{)} \\ & = & 1 & \textit{(d'après le Théorème 2)} \end{array}$$

□

Commentaire

- Les probabilités $\mathbb{P}([X \leqslant x])$, $\mathbb{P}([X \geqslant x])$ et $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ s'interprètent comme des aires sous la courbe représentative de la densité f_X.
- On a : $\mathbb{P}([X < x]) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$ et $\mathbb{P}([a < X < b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X < b]) = \mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$.
- Contrairement aux v.a.r. discrètes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. Ainsi la loi de X n'est pas donnée par les probabilités $\mathbb{P}([X = x])$ mais par la fonction de répartition ou par une densité.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors on note f_X une de ses densités : $f : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Déterminer $\mathbb{P}([X \leqslant 2])$ et $\mathbb{P}([X \geqslant 1])$.

Exercice 5

Soient Z la v.a.r. définie dans l'exercice 1. Calculer

- $\mathbb{P}([Z < 4])$
- $\mathbb{P}([2 < Z \leqslant 3])$
- $\mathbb{P}([Z \geqslant 0])$
- $\mathbb{P}([Z \in [1, 3[])$

Théorème 2.

- *Si f est une densité de probabilité, alors la fonction de répartition :*
  $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où f est continue.
  En un tel point, on a $F'(x) = f(x)$
- *Plus généralement, si f est continue à droite (resp. à gauche), alors F est dérivable à droite (resp. à gauche).*

II. Moments d'une variable aléatoire à densité

II.1. Espérance

Définition (Espérance)
Soit X une v.a.r. de densité f.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est **absolument convergente**, on dit que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$ et on a :

$$\mathbb{E}(X) \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Exercice 6

1. La v.a.r. X définie dans l'exercice 4 admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire X. La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Proposition 4 (Linéarité de l'espérance)**.**

- *Soient X et Y deux v.a.r. admettant une espérance. Alors $X+Y$ admet une espérance et :*

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

- *Soient X_1, …, X_n des v.a.r. admettant une espérance. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance et :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

- *Soit X une v.a.r. admettant une espérance et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λX admet une espérance et :*

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\,\mathbb{E}(X)$$

Commentaire

Cette proposition nous autorise à calculer des espérances de v.a.r. qui ne sont ni discrètes ni à densité.

Exercice 7
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$. On note Y la v.a.r. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\; Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y, notée F_Y. La tracer. La v.a.r. Y est-elle une v.a.r. à densité ?

2. Justifier que $Y = \dfrac{X+|X|}{2}$.

3. Déterminer la loi de $|X|$.

4. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Preuve.

1. • Par définition de la v.a.r. Y, $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[\cap X(\Omega) = [0, 1]$.

• Déterminons la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[= [0, 1]$. Donc on a :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \in [0, 1]$.
On applique la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements : $([X \leqslant 0], [X > 0])$.

$$\begin{array}{rcl} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ & = & \mathbb{P}([0 \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) \end{array}$$

On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. Donc :

$$\mathbb{P}([X \leqslant 0] = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2} \left[\ t\ \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

De plus, comme $x \in [0, 1]$:

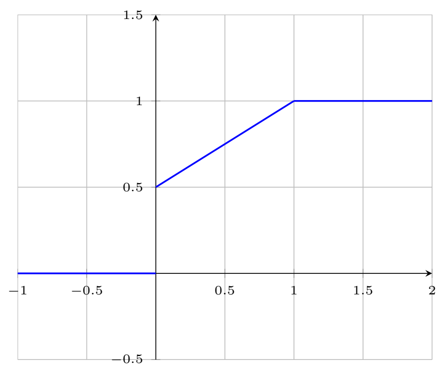
$$\mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) = \int_{0}^{x} f(t)\ dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2} \left[\ t\ \right]_{0}^{x} = \frac{x}{2}$$

- Si $x > 1$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ car $Y(\Omega) \subset [0, 1]$. Donc on a :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

•



• La fonction F_Y n'est pas continue en 0. Ainsi Y n'est pas une v.a.r. à densité.

• La fonction F_Y n'est pas constante par morceaux, donc Y n'est pas une v.a.r. discrète.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $X(\omega) \leqslant 0$, alors :

$$(X + |X|)(\omega) = X(\omega) + (|X|)(\omega) = \cancel{X(\omega)} + \cancel{(-X)(\omega)} = 0 = Y(\omega)$$

- Si $X(\omega) > 0$, alors :

$$\left(\frac{X + |X|}{2}\right)(\omega) = \frac{X(\omega) + (|X|)(\omega)}{2} = \frac{X(\omega) + X(\omega)}{2} = \frac{\cancel{2}X(\omega)}{\cancel{2}} = X(\omega) = Y(\omega)$$

Finalement, on a bien : $\dfrac{X + |X|}{2} = Y$.

3. • Notons $h : x \mapsto |x|$, de sorte que $Z = h(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$, alors $X(\Omega) = [-1, 1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) = h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h([-1, 1]) \\ &= [0, 1] && \textit{(par définition de } h\textit{)} \end{aligned}$$

Donc $Z(\Omega) = [0, 1]$.

• Déterminons la fonction de répartition de Z.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ car $Z(\Omega) = [0, 1]$. Donc on a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x > 1$, alors $[Z \leqslant x] = \Omega$ car $Z(\Omega) = [0, 1]$. Donc on a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ &= \int_{-x}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\, [\, t\,]_{-x}^{x} = x \end{aligned}$$

On reconnaît une loi usuelle : $|X| \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

4. La v.a.r. Y admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.
Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X + |X|}{2}\right) = \frac{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(|X|)}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$\square$

Proposition 5 (Croissance de l'espérance).
Soient X et Y deux v.a.r. admettant une espérance telles que $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = 1$. Alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Commentaire

On parle ici de `L`'espérance d'une variable aléatoire. Mais pourtant, nous avons bien défini `DEUX` espérances différentes :

- l'espérance de X, si X est une variable discrète :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\,\mathbb{P}([X = k])$$

- l'espérance de X, si X est une variable à densité :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$$

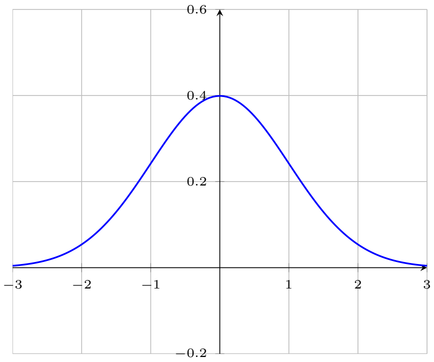
Pire encore ! Dans l'exercice 7, on considère l'espérance d'une variable aléatoire qui n'est `NI` discrète, `NI` à densité !

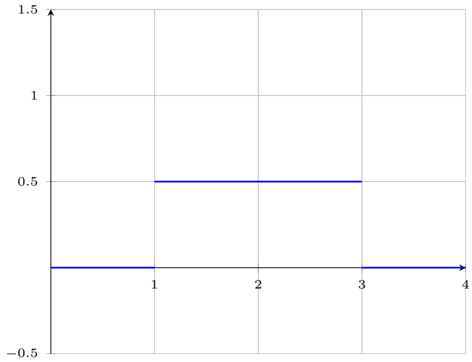
Il existe en fait une théorie de l'intégration qui permet de généraliser l'intégrale de Riemann et unifier les définitions de l'espérance.
Cette intégrale « généralisatrice » est appelée *intégrale de Lebesgue*.
On peut remarquer que, depuis le début de l'année, la plupart des fonctions que nous cherchions à intégrer étaient « sympathiques », c'est-à-dire continues par morceaux.
De manière générale, les fonctions que l'on cherche à intégrer avec l'intégrale de Riemann sont des fonctions que l'on peut tracer à la main. Ce sont donc des fonctions auxquelles on peut appliquer la méthode des rectangles. C'est bien normal puisque c'est de cette manière que l'on définit l'intégrale de Riemann : comme la limite de l'aire formée par la méthode des rectangles (cf figure ci-dessous).

On a donc commencé par définir l'intégrale de Riemann :

- pour des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ (par méthode des rectangles),
- puis pour des fonctions continues sur $]a, b[$ et intégrables sur tout segment $[c, d] \subset\ ]a, b[$. On dit que ces fonctions sont *localement intégrables*. C'est déjà une extension de l'intégrale de Riemann originale.

Les fonctions suivantes, par exemple, sont Riemann-intégrable, c'est-à-dire qu'on peut calculer l'aire sous leur courbe représentative grâce à l'intégrale de Riemann.





Mais qu'en est-il des fonctions que l'on ne peut pas tracer ?
Prenons l'exemple de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Cette fonction n'est pas Riemann-intégrable. En effet, f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$. Donc elle n'est intégrable sur aucun intervalle du type $[a, b]$ avec $a < b$: chaque segment $[a, b]$ contient au moins un rationnel, donc un point de discontinuité.

Commentaire

On utilise ici le fait que $\mathbb{R}$ est *archimédien*, c'est-à-dire :
pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$.
Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

- $y - x > 0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y - x) > 1$.
  On a alors $ny > nx + 1$.
- On note $m = \lfloor nx \rfloor + 1$, alors, par définition de la partie entière :

$$m - 1 \leqslant nx < m$$

  Donc $m \leqslant nx + 1 < ny$.
- On a donc trouvé $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$nx < m < ny \quad \text{donc} \quad x < \frac{m}{n} < y$$

  En posant $r = \dfrac{m}{n}$, on a bien $x < r < y$ et $r \in \mathbb{Q}$.

$\square$

2. On peut cependant intégrer la fonction f grâce à l'intégrale de Lebesgue.
Plutôt que de s'intéresser d'abord à la fonction à intégrer, l'intégrale de Lebesgue s'intéresse d'abord à l'ensemble sur lequel on souhaite intégrer et met un « poids », noté λ, sur cet ensemble. On appelle en fait ce poids une *mesure*.
Par exemple :

× la mesure d'un segment $]a, b[$ avec $a < b$ est sa longueur : $\lambda(]a, b[) = b - a$,

× la mesure d'un singleton $\{a\}$ est 0 : $\lambda(\{a\}) = 0$,

× la mesure d'une union dénombrable disjointe d'intervalles est la somme de leurs mesures.
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$ et $b_n < a_{n+1}$:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n, b_n[\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda(]a_n, b_n[) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (b_n - a_n)$$

Cette somme est éventuellement infinie. Par exemple, $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, $\lambda(]0, +\infty[) = +\infty$, etc.

× la mesure d'une différence est la différence des mesures.
Si $]c, d[\subset]a, b[$, alors :

$$\lambda\left(]a, b[\setminus]c, d[\right) = \lambda(]a, b[) - \lambda(]c, d[) = (b - a) - (d - c)$$

Dans notre exemple, on souhaite intégrer f sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a) Commençons par déterminer la mesure de ces ensembles.

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Q}} \{k\}\right)$$

Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable et les singletons ci-dessus sont disjoints, donc on obtient :

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{k\in\mathbb{Q}}^{\lambda} (\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{Q}} 0 = 0$$

On a donc :

$$\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \lambda(\mathbb{R}) - \lambda(\mathbb{Q}) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$$

b) Comme la mesure de l'ensemble $\mathbb{Q}$ est nul, la valeur de f sur cet ensemble n'est pas comptabilisé pour le calcul de son intégrale.
Ainsi, pour l'intégrale de Lebesgue, intégrer f sur $\mathbb{R}$ revient à intégrer f sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Or, sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, f est nulle, donc son intégrale est nulle.

La fonction f est donc Lebesgue-intégrable et son intégrale vaut 0.

On constate que la valeur de l'intégrale d'une fonction f avec l'intégrale de Lebesgue n'est pas modifiée si l'on change la définition de f sur un ensemble de mesure nulle. Donc si on change la définition de f sur un nombre fini de points par exemple :

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

Cela rappelle étrangement une partie de la définition d'une densite : une des caractéristiques d'une densité est d'être continue **sauf en un nombre fini de points**.
D'ailleurs, pour déterminer une densité f associée à une fonction de répartition F, on choisit souvent des valeurs arbitraires de f en certains points (les points où F n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$).
On sent donc que cela peut être justifié grâce à l'intégrale de Lebesgue.
On peut retenir que :

× si une fonction est Riemann-intégrable, alors elle est aussi Lebesgue-intégrable et les valeurs des intégrales sont les mêmes (ce qui est rassurant : tous nos calculs d'intégrales sont toujours valides !)

× il existe des fonctions Lebesgue-intégrables qui ne sont pas Riemann-intégrables (par exemple : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$)

II.2. Théorème de transfert et moment d'ordre r

Théorème 3 (Théorème de transfert)**.** *Soit X une v.a.r. de densité f_X et φ une fonction* **continue** *sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors :*

1. *la v.a.r. $\varphi(X)$ est une v.a.r. .*

2. *De plus, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\, dt$ est* **absolument convergente***, alors la v.a.r. $\varphi(X)$ admet une espérance et on a :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\, dt$$

Exercice 8

On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1) La v.a.r. $Y = \mathrm{e}^X$ admet-elle une espérance ?

2) La v.a.r. $Z = \ln(X)$ admet-elle une espérance ?

Définition (Moment d'ordre r)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$ est absolument convergente, alors on dit que X admet un *moment d'ordre r*, notée $m_r(X)$ et on a :

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$$

En particulier, le moment d'ordre 2 est défini par

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$$

II.3. Variance et écart-type

Définition (Variance)

Si la v.a.r. X admet une espérance et si la v.a.r. $(X-\mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance, on appelle *variance* de X le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Théorème 4.

Une v.a.r. à densité X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Commentaire

- Si X est une v.a.r. à densité admettant une variance, alors on peut obtenir celle-ci par théorème de transfert :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - \mathbb{E}(X)\big)^2 f_X(t)\, dt$$

- Si X est une v.a.r. discrète admettant une variance, alors on peut aussi obtenir celle-ci par théorème de transfert :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \sum_{k \in X(\Omega)} \big(k - \mathbb{E}(X)\big)^2\, \mathbb{P}([X = k])$$

Exercice 9

1. La v.a.r. X définie dans l'exercice 4 admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

2. Soit X une v.a.r. de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Définition (Ecart-type)
Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. On appelle alors *écart-type* le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Définition (Variable centrée réduite)

- Si X est une v.a.r. à densité telle que $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une *variable centrée.*
- Si X est une v.a.r. à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une *variable réduite.*
- Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la v.a.r. $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la *variable centrée réduite associée à* X.

III. Indépendance

Définition (Indépendance)
Deux variables aléatoires réelles (discrètes ou à densité) X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous intervalles réels I et J :

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}([X \in I])\mathbb{P}([Y \in J])$$

Commentaire

On peut ainsi montrer la non indépendance de 2 v.a.r. quelconques.

Exercice 10
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([-1, 1])$. On note Y la v.a.r. définie par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } X(\omega) < 0 \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de Y ?

2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

1.
- $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ par définition de Y.
- Par définition de Y, $[Y = 1] = [X \geqslant 0]$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([X \geqslant 0]) = \int_0^{+\infty} f_X(t)\ dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2} [\ t\ ]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La famille $([Y=0], [Y=1])$ est un système complet d'événements, donc :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = 1 - \mathbb{P}([Y=1]) = \frac{1}{2}$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. $\mathbb{P}([Y=1] \cap [X<0]) = 0$.
Or $\mathbb{P}([Y=1]) = \frac{1}{2}$ et :

$$\mathbb{P}([X<0]) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[\ t\ \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}([Y=1]) \times \mathbb{P}([X<0]) = \frac{1}{4} \neq 0 = \mathbb{P}([Y=1] \cap [X<0])$$

Donc les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

□

Proposition 6 (Lemme des coalitions)**.**
Soient X_1, X_2, ..., X_n des v.a.r. réelles (discrètes ou à densité) indépendantes. Soient f et g deux fonctions. Alors pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $f(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est indépendante de $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$.

Proposition 7.
Soient X et Y deux v.a.r. **indépendantes** *admettant une espérance.*
Alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Proposition 8.

- *Soient X et Y deux v.a.r.* **indépendantes** *admettant une variance. Alors $X+Y$ admet une variance et :*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

- *Soient X_1, ..., X_n des v.a.r.* **indépendantes** *admettant une variance. Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance et :*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$$

Lois usuelles à densité

IV. La loi uniforme

Définition (Loi uniforme)
Une v.a.r. X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, notée $\mathcal{U}([a, b])$, si une densité de X est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 9.
La fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{U}([a, b])$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

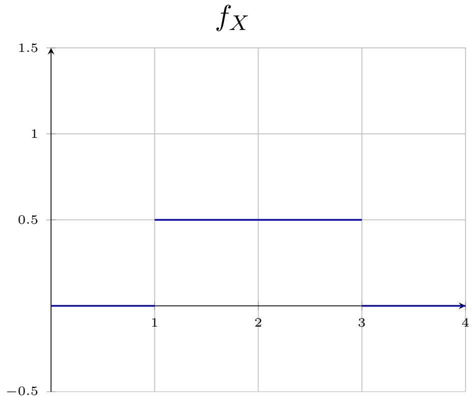
Preuve.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue 3 cas :

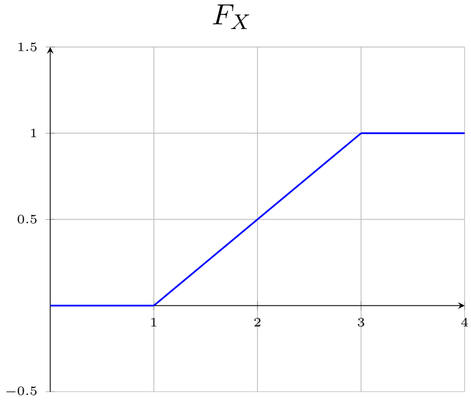
- Si $x < a$, $f(x) = 0$, donc $F(x) = 0$.
- Si $x > b$, $f(x) = 0$, donc $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{a}^{b} f(t)\ dt = 1$ (Proposition 4)
- Si $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\ dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_{a}^{x}\ dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

□

Exemple $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1,3])$





Proposition 10.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$*, alors :*

× *la v.a.r.* X *admet une espérance et une variance,*

× $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ *et* $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Preuve.

1. • La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour un calcul de moment.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\ dt = \int_a^b t\, f_X(t)\ dt$, car f_X est nulle en dehors de $[a,b]$.

La fonction $t \mapsto t f_X(t)$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b t\, f_X(t)\ dt$ est donc bien définie.
Ains, la v.a.r. X admet une espérance.

• On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\ dt = \int_a^b t \frac{1}{b-a}\ dt \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b t\ dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

2. • La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_X(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour un calcul de moment.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_X(t)\ dt = \int_a^b t^2\, f_X(t)\ dt$, car f_X est nulle en dehors de $[a,b]$.

La fonction $t \mapsto t^2\, f_X(t)$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc $\displaystyle\int_a^b t^2\, f_X(t)\ dt$ est bien définie.
Donc X admet un moment d'ordre 2 (donc une variance).

- On calcule :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\ dt \ = \ \frac{1}{b-a}\int_a^b t^2\ dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b \ = \ \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} \\ &= \frac{b^2+ab+a^2}{3}\end{aligned}$$
D'après la formule de Koenig-Huygens, on obtient :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

□

Le résultat suivant montre qu'on peut toujours se ramener à une loi uniforme sur $[0,1]$.

Proposition 11.

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = (b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

2. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \dfrac{1}{b-a}(X-a) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

Preuve.

1. • Notons $h : x \mapsto (b-a)x + a$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $X(\Omega) = [0,1]$. On en déduit :
$$\begin{aligned}Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h([0,1]) \\ &= [h(0), h(1)] && \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1]\textit{)} \\ &= [a,b]\end{aligned}$$
Donc : $Y(\Omega) = [a,b]$.

• Déterminons la fonction de répartition de Y, F_Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Soit $x < a$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [a,b]$. Ainsi :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Soit $x > b$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ car $Y(\Omega) = [a,b]$. Ainsi :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

× Soit $x \in [a,b]$.
$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([(b-a)X + a \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-a}{b-a}\right]\right) \ = \ F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \\ &= \frac{x-a}{b-a} && \textit{(par définition de } F_X \textit{ et car } \frac{x-a}{b-a} \in [0,1]\textit{)}\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([a,b])$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

2. Même raisonnement.

□

V. La loi exponentielle

Définition (Loi exponentielle)
Une v.a.r. X suit la loi exponentielle de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 12.
La fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \textit{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Preuve.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

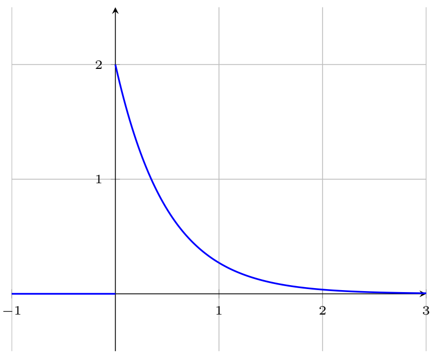
- Si $x < 0$, alors $f_X(x) = 0$, donc $F_X(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

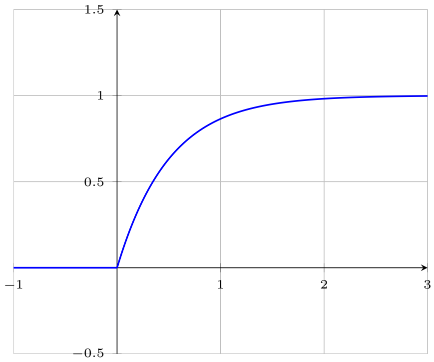
□

Exemple $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$

f_X



F_X



Proposition 13.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

× *la v.a.r. X admet une espérance et une variance,*

× $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ *et* $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Preuve.

1. • X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$ converge absolument ce qui équivaut à de la convergence pour un calcul de moment.
Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$ car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

- Soit $A \geqslant 0$.
  On effectue une intégration par parties.

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & -\mathrm{e}^{-\lambda t} & & v(x) & = & \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt & = & \left[\,-t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\right]_0^A + \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt \\ & = & -A\,\mathrm{e}^{-\lambda A} + \left[\,-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\,\right]_0^A \\ & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{\lambda} \end{array}$$

  Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

2. - X admet un moment d'ordre 2 ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,f_X(t)\,dt$ converge absolument ce qui équivaut à de la convergence pour un calcul de moment.
  Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,f_X(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2\,f_X(t)\,dt$ car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- Soit $A \geqslant 0$.
  On effectue une intégration par parties.

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^2 & & u'(x) & = & 2t \\ v'(x) & = & -\mathrm{e}^{-\lambda t} & & v(x) & = & \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A t^2\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt & = & \left[\,-t^2\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\right]_0^A + 2\displaystyle\int_0^A t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt \\ & = & -A^2\,\mathrm{e}^{-\lambda A} + \dfrac{2}{\lambda}\displaystyle\int_0^A t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt \\ & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{2}{\lambda^2} \end{array}$$

  Donc X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{2}{\lambda}$.
  D'où, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$\square$

Commentaire

On peut en fait démontrer qu'une v.a.r. X de loi exponentielle admet des moments à tout ordre.
Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \, f_X(t) \, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.
- Tout d'abord, comme la fonction f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \, f_X(t) \, dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t^r \, f_X(t) \, dt$$
- De plus, la fonction $t \mapsto t^r \ f_X(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- On obtient :
  × $t^r \, f_X(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. En effet :
  $$\frac{t^r \, f_X(t)}{\frac{1}{t^2}} \ = \ t^{r+2} \, f_X(t) \ = \ t^{r+2} \, \lambda \, e^{-\lambda \, t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$
  × $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^r \, f_X(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$,
  × l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2 > 1)$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^r \, f_X(t) \, dt$ est convergente.
- Comme de plus la fonction $t \mapsto t^r \, f_X(t)$ est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} t^r \, f_X(t) \, dt$ est bien définie.

Finalement, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \, f_X(t) \, dt$ est convergente.
On en déduit que la v.a.r. X admet des moments à tout ordre. $\square$

Proposition 14.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

2. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Preuve.
Montrons : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- Notons $h : x \mapsto \lambda\, x$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
  Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $X(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h([0,+\infty[) \\ &= \left[h(0), \lim_{x \to +\infty} h(x)\right[&& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

  Ainsi : $Y(\Omega) = [0, +\infty[$.

- Déterminons la fonction de répartition de Y, F_Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([\lambda\, X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x}{\lambda}\right]\right) && \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\ &= F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \frac{x}{\lambda}} && \textit{(car } \frac{x}{\lambda} \geqslant 0\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

  On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(1)$. D'où $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

On démontre de même les autres implications. □

Définition (Loi sans mémoire)
On dit qu'une v.a.r. X à valeurs positives suit une loi *sans mémoire* lorsque l'une de ses deux conditions est vérifiée :

- $\forall (t,h) \in \mathbb{R}_+^2,\ \mathbb{P}([X > t+h]) = \mathbb{P}([X > t])\mathbb{P}([X > h])$
- $\forall (t,h) \in \mathbb{R}_+^2$, si $\mathbb{P}([X > h]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[X>h]}([X > t+h]) = \mathbb{P}([X > t])$$

Théorème 5.
Les v.a.r. suivant une loi exponentielle (et la v.a.r. quasi-certainement nulle) sont les seules v.a.r. positives sans mémoire.

Exercice 11

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-X)$?

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\, \ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
  Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $X(\Omega) =]0,1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) & \\ & = & h(]0,1[) & \\ & = & \Big]\lim\limits_{x\to 0} h(0), \lim\limits_{x\to 1} h(x)\Big[& \textit{(car h est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ $(*)$)} \\ & = &]0,+\infty[& \end{array}$$

  Ainsi : $Y(\Omega) =]0,+\infty[$.
  On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :
  × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables.
  × soit $x \in]0,1[$.

$$h'(x) \ = \ -\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{1-x}\right) \ = \ \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

  Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0,1[$.

- Déterminons la fonction de répartition de Y.
  × Soit $y \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}([Y \leqslant y]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Soit $y \in]0,+\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(y) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant y]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant y\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda y]) & \textit{(car $-\lambda < 0$)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda y}\right]\right) & \textit{(car la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right]\right) & \\ & = & F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right) & \end{array}$$

  Or on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} 0 < y & \Leftrightarrow & 0 > -\lambda > -\lambda\, y & \textit{(car $-\lambda < 0$)} \\ & \Leftrightarrow & 1 = \mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-\lambda y} > 0 & \textit{(car la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)} \\ & \Leftrightarrow & 0 < 1-\mathrm{e}^{-\lambda y} < 1 & \end{array}$$

De plus, comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$: $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$,

donc $F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}$.

Finalement : $F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ. Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. , donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

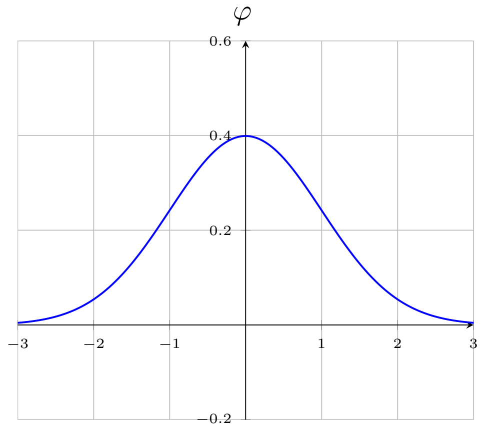
VI. Les lois normales

VI.1. La loi normale centrée réduite

Définition (Loi normale centrée réduite)
Une v.a.r. X suit la *loi normale centrée réduite*, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si une densité de X est la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exemple $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$



Exercice 12
Déterminer la valeur des intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$

Proposition 15.
La fonction de répartition d'une telle v.a.r. est la fonction, notée ϕ, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Commentaire

On ne sait pas exprimer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles. En particulier, on ne connait pas de primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
On dispose par contre de quelques règles de calculs ainsi que d'une table de valeurs.

Proposition 16.

- *Comme la densité φ est une fonction paire, on a :*

$$\phi(0) = \mathbb{P}([X \leqslant 0]) = \frac{1}{2}$$

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{P}([|X| \leqslant x]) = 2\phi(x) - 1$$

Preuve.

- Comme φ est une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt$ converge. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt & = & 2\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\ dt & \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ & = & 2\,\phi(0) & \\ & = & 2\,\mathbb{P}([X \leqslant 0]) & \end{array}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt$$

On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \psi(t)}$, avec la fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définie par $\psi : t \mapsto -t$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \varphi(-u)\ du & \\ & = & \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \varphi(u)\ du & \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\ du & \\ & = & 1 - \phi(x) & \end{array}$$

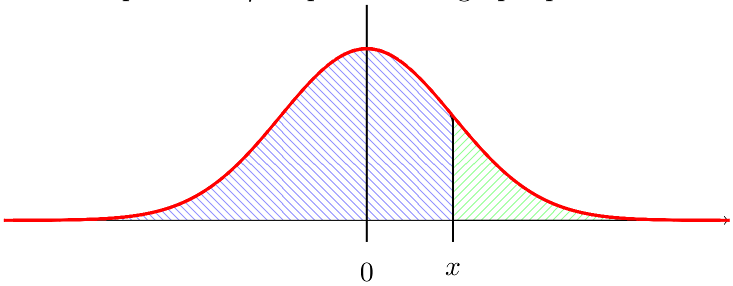
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ & = & \phi(x) - \phi(-x) \\ & = & \phi(x) - (1 - \phi(x)) \\ & = & 2\,\phi(x) - 1 \end{array}$$

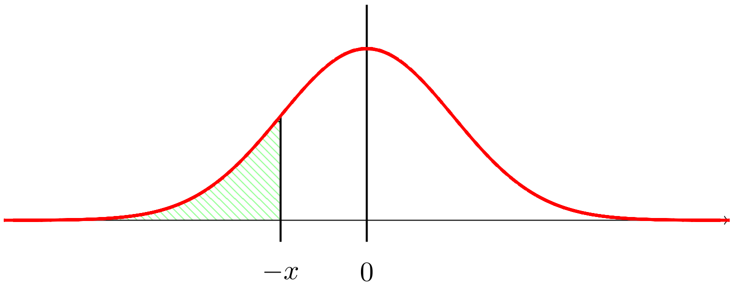
$\square$

Commentaire

Ce résultat provient de la parité de φ et peut se lire graphiquement.



$= \Phi(x)$ et $= 1 - \Phi(x)$



$= \Phi(-x)$

Proposition 17.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, *alors*

× *la v.a.r.* X *admet une espérance et une variance,*

× $\mathbb{E}(X) = 0$ *et* $\mathbb{V}(X) = 1$

Preuve.

1) X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\ dt$ convergente absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour des calculs de moments.

a) Étude de la nature de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ \varphi(t)\ dt$.

- La fonction $t \mapsto t\ \varphi(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A t\ \varphi(t)\ dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A t\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A (-t)\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

- On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\varphi(t)\ dt$ converge et vaut 1.

b) Étude de la nature de $-\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ \varphi(t)\ dt$.

Soit $A \geqslant 0$.
On se ramène au cas précédent en posant le changement de variable affine $\boxed{u=-t}$. Plus précisément :

$$\int_{-A}^{0} t\ \varphi(t)\ dt \ = \ \int_{A}^{0} (\cancel{-}u)\ \varphi(-u)(\cancel{-}du) \ = \ -\int_{0}^{A} u\ \varphi(u)\,du \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ \varphi(t)\ dt$ est absolument convergente.
Ainsi, X admet une espérance.

2) On déduit des calculs précédents que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$.

3) X admet un moment une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\ \varphi(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à de la convergence pour des calculs de moments.

a) Étude de la nature de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\ \varphi(t)\ dt$.

- La fonction $t \mapsto t^2\ \varphi(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{A} t^2\ \varphi(t)\ dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{A} t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{A} t\times(-t)\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\end{aligned}$$

On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) &=& t & & u'(t) &=& 1 \\ v'(t) &=& -t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & & v(t) &=& \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{A} t\times(-t)\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big[\ t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ \Big]_0^A - \int_{0}^{A} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \right) \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\end{aligned}$$

- On en déduit que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\,\varphi(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

b) Étude de la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2\ \varphi(t)\ dt$.

On se ramène au cas précédent en posant le changement de variable affine $\boxed{u = -t}$.
Plus précisément :

$$\int_{-\infty}^{0} t^2\ \varphi(t)\ dt \ = \ \int_{+\infty}^{0} (-u)^2\ \varphi(-u)(-\,du) \ = \ \int_{0}^{+\infty} u^2\ \varphi(u)\,du$$

c) On obtient donc : $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

d) D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - 0 = 1$$

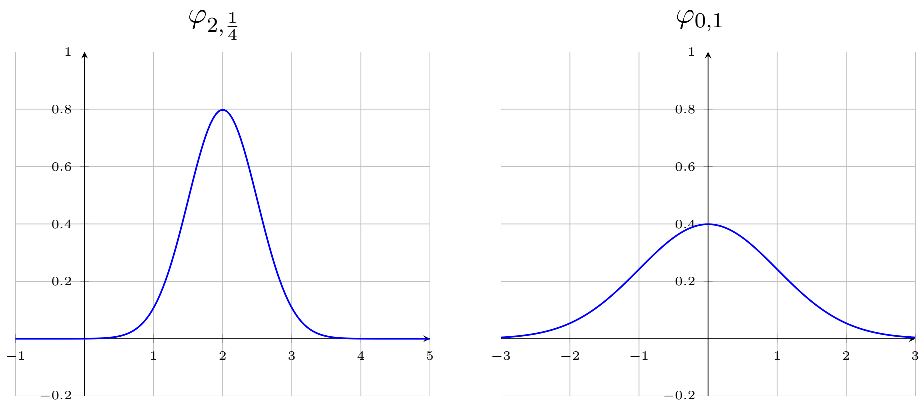
□

VI.2. Loi de Laplace-Gauss ou loi normale

Définition (Loi normale)
Une v.a.r. X suit la loi normale de paramètres (m, σ^2), notée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ (où $\sigma > 0$), si une densité de X est la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_{m,\sigma} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Exemple $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$



Proposition 18.
La fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ est notée $\phi_{m,\sigma}$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_{m,\sigma} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\ dt$$

Proposition 19.

1. *Si X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) alors $Y = aX + b$ (où $a \neq 0$) suit une loi normale de paramètres $(am + b, a^2\sigma^2)$. Ainsi :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$$

2. *Si X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) alors $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. Ainsi :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad X^* = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, 1\right)$$

Preuve.
On va montrer le premier point (le deuxième étant une conséquence du premier).

- « $\Rightarrow$ »
  Soit donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
  - $\times$ Notons $h : x \mapsto a\,x + b$ de telle sorte que $Y = h(X)$.
    Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{R}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \\ & = & h(\mathbb{R}) \ = \ h(]-\infty,+\infty[) \\ & = &]-\infty,+\infty[\end{array}$$

    (attention le sens de monotonie de h dépend du signe de a)
    D'où $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.
  - $\times$ Déterminons la fonction de répartition de Y.
    Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([aX+b \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \dfrac{x-b}{a}\right]\right) & \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ & = & F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right) & \end{array}$$

    Or, par définition de la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité, on a :

$$F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \varphi(t)\ dt$$

    On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \psi(t)}$, avec la fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définie par $\psi : t \mapsto at + b$.

$$\left|\begin{array}{l} u = at + b \\ \hookrightarrow du = a\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{a}\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \\ \bullet\ t = \dfrac{x-b}{a} \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$

    On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \varphi(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi\left(\frac{u-b}{a}\right)\frac{1}{a}\ du \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{\left(\frac{u-b}{a} - m\right)^2}{2\sigma^2}\right)\ du \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(u-(am+b))^2}{2a^2\sigma^2}\right)\ du \\ & = & \phi_{\mathcal{N}(am+b,a^2\sigma^2)}(x) \end{array}$$

  On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}\left(am+b, \sigma^2\right)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am+b, \sigma^2\right)$.
- « $\Leftarrow$ » Même raisonnement $\square$

Commentaire

- Toute v.a.r. suivant une loi normale peut se ramener par une transformation affine à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
- Noter que la v.a.r. $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la v.a.r. centrée réduite associée à X.

Proposition 20.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, alors :

× *la v.a.r. X admet une espérance et une variance,*

× $\mathbb{E}(X) = m$ *et* $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ *donc* $\sigma(X) = \sigma$

Commentaire

On peut en fait démontrer qu'une v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ admet des moments à tout ordre.
Démonstration.

- Commençons par démontrer qu'une v.a.r. Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ admet des moments à tout ordre.
- Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

$\square$

Proposition 21.
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes.
On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_i, \sigma_i^2\right)$.
Alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + \ldots + m_n, \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2\right)$.

VI.3. Lecture de la table d'une $\mathcal{N}(0,1)$

On utilise parfois (notamment en statistiques), des tables contenant les valeurs caractéristiques de certaines lois usuelles. La table ci-dessous contient les valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(t) = \mathbb{P}([X \leqslant t]) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Fig. 1 Table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Commentaire

Comment lire les valeurs de cette table ?

- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(1.64)$
  - × on sélectionne la ligne 1.6
  - × on sélectionne alors la colonne 0.04

  On lit la valeur de la cellule l'intersection de cette ligne et colonne. On lit : $\Phi(1.64) = 0.9495$
  (la probabilité de l'événement $[X \leqslant 1.64]$ *est d'environ* 95%*)*
- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(-0.81)$
  On utilise la formule : $\Phi(-0.81) = 1 - \Phi(0.81)$
  On lit alors : $\Phi(-0.81) = 1 - 0.7881 = 0.2119$
  (la probabilité de l'événement $[X \leqslant -0.81]$ *est d'environ* 21%*)*

VII. Transformation d'une v.a.r. à densité

VII.1. Transformation affine d'une v.a.r. à densité

Théorème 6.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.
Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

1) La var $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par $\boxed{f_Y : x \mapsto \dfrac{1}{|a|}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$

Démonstration.
Notons Y la v.a.r. définie par $Y = aX + b$. Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([aX + b \leqslant x]) = \mathbb{P}([aX \leqslant x - b])$$

On doit alors distinguer deux cas :

1) Si $a > 0$, alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \dfrac{x-b}{a}\right]\right) = F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

2) Si $a < 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X < \frac{x-b}{a}\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{x-b}{a}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction F_X étant la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité, on sait que F_X est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Par composition, on en déduit que F_Y est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On en déduit que Y est une v.a.r. à densité.
Déterminons une densité de Y.

1) Si $a > 0$, alors : $F_Y'(x) = \dfrac{1}{a}\ F_X'\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = \dfrac{1}{a}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

2) Si $a < 0$, alors : $F_Y'(x) = -\dfrac{1}{a}\ F_X'\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = -\dfrac{1}{a}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

On en conclut qu'une densité de Y est donnée par : $x \mapsto \dfrac{1}{|a|}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$. $\square$

Remarque

- Peut-on généraliser cette propriété : si X et Y sont des variables à densité, la v.a.r. $X + Y$ est-elle à densité ?

  `NON !` on peut par exemple considérer :

  × une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (définition à suivre),

  × et la v.a.r. Y donnée par $Y = 1 - X$.

  Alors $X + Y = 1$, ce qui montre que $X(\Omega) = \{1\}$.
  Ainsi, $X + Y$ n'admet pas de densité en tant que v.a.r. discrète (finie).

- L'ensemble des v.a.r. à densité n'est donc pas stable par addition.
  De ce fait, ce n'est pas un espace vectoriel.

Exercice
Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
On note $Y = 2X + 1$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

VII.2. Transformation polynomiale (carré)

Théorème 7.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

1) La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par :

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Démonstration.
La démonstration est analogue à la démonstration précédente.

- Si $x < 0$: $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = \varnothing$,
  et alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$: $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$.
  et alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ (car constante sur cet intervalle).
Sur $]0, +\infty[$, F_Y est obtenue comme composée de la fonction F_X qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points. Enfin, en tout point $x > 0$ où F_Y est dérivable, on a :

$$\begin{aligned} F_Y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, F_X'(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\, F_X'(-\sqrt{x})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, f_X(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, f_X(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) \end{aligned}$$

et $F_Y'(x) = 0$ pour tout $x < 0$. □

Exercice
Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$.
Notons $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

2. La v.a.r. Y est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

VII.3. Une transformation usuelle

Exercice
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$.
Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$?

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
  Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $X(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ = \ h\big([0,1[\big) \\ & = & \Big[h(0), \lim\limits_{x\to 1} h(x)\Big[\qquad \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\ (*)\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[\end{array}$$

  Ainsi : $Y(\Omega) = [0,+\infty[$.
  On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction.

- Déterminons la fonction de répartition de Y.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - Si $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{En effet, comme} & x \geqslant 0 & \\ \text{alors} & -\lambda x \leqslant 0 & \\ \text{d'où} & 0 < \mathrm{e}^{-\lambda x} \leqslant 1 & \textit{(car } \exp \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{et donc} & 0 \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} < 1 & \end{array}$$

Finalement : $F_Y : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty,0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{array}\right.$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

Remarque
La fonction h réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0,+\infty[$. La méthode développée ici consiste à déterminer, étape par étape, la bijection réciproque de h *i.e.* la fonction $h^{-1} : [0,1[\to [0,+\infty[$. Pour $x \in [0,+\infty[$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant x] \big) = \mathbb{P}\big([h(X) \leqslant x] \big) = \mathbb{P}\big(\left[X \leqslant h^{-1}(x)\right] \big)$$

Il n'est donc pas étonnant que $h^{-1}(x) \in [0,1[$. C'est une conséquence directe de la méthode (dite d'inversion - *cf* TP) développée dans cet exercice.

VII.4. D'autres techniques à connaître

VII.4.a) Loi de la valeur absolue d'une v.a.r. à densité

Exercice
Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[-2,2]$.
La variable X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$.
La variable aléatoire Y admet-elle une densité ?
Si oui, déterminer une densité de Y.

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Z = X + Y$.
On pourra considérer le système complet d'événements $([X < 0]\,, [X \geqslant 0])$.
La v.a.r. Z admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de Z.

VII.4.b) Loi de la partie entière d'une v.a.r. à densité

Exercice *(d'après* `EDHEC 2002`*)*
Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière par défaut de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $\lambda > 0$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.
On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z},\ [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$.

1. ***a)*** Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k-1])$.

c) En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$.
En déduire l'espérance et la variance de Y.

2. On pose $Z = X - Y$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$.

b) En utilisant le système complet d'événements $\big([Y = k] \big)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

c) En déduire une densité f de Z.

VII.4.c) Loi du min / max

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes, de densité f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in\ [1, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty, 1[\end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X_1.

3. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.

4. On pose $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Vérifier que Y et Z sont des variables aléatoires réelles à densité, puis déterminer une densité de Y et une densité de Z.
Étudier l'existence des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$ de Y et Z, et les calculer lorsqu'elles existent.

VII.4.d) Loi de la somme de deux v.a.r. à densité

Exercice *(d'après* `HEC 2010`*)*
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U + V$ est à denisté à condition que la fonction f_{U+V} suivante existe. Cette fonction f_{U+V} définit alors une densité de $U + V$.

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t)\ dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.

2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda |x|}$$

3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.