Chap. ? ? : Équations différentielles linéaires

I. Généralités

I.1. Solution d'une équation différentielle

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et I un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit F une application de $\mathbb{R} \times \left(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})\right)^{p+1}$ dans $\mathbb{R}$.

- On appelle **équation différentielle d'ordre** p une équation fonctionnelle de la forme :

$$F\big(t, y, y', \dots, y^{(p)}\big) \ = \ 0 \qquad (E)$$

- On dit de plus que cette équation est :
  - × **linéaire** si la fonction F est linéaire en les variables y, y', $\dots$, $y^{(p)}$, c'est-à-dire si l'équation (E) s'écrit sous la forme :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y_1(t) + a_0(t)\, y_0(t) \ = \ b(t) \qquad (L)$$

    où :
    - × les fonctions a_0, $\dots$, a_p sont continues sur I,
    - × la fonction a_p n'est pas la fonction nulle,
    - × la fonction b est continue sur I et est appelée **second membre** de l'équation différentielle (L).

    On écrira aussi cette équation fonctionnelle sous la forme :

$$a_p\, y^{(p)} + a_{p-1}\, y^{(p-1)} + \cdots + a_1\, y_1 + a_0\, y_0 \ = \ b$$

  - × **linéaire à coefficients constants** si les fonction a_0, $\dots$, a_p définies précédemment sont constantes sur I. On écrit alors l'équation différentielle sous la forme :

$$a_p\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) \ = \ b(t)$$

  - × **homogène** lorsque son second membre est nul, c'est-à-dire si la fonction b est la fonction nulle. Lorsque le second membre de (L) n'est pas nul, on appelle **équation différentielle homogène associée à** (L) l'équation obtenue en remplaçant la fonction b par la fonction nulle :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y_1(t) + a_0(t)\, y_0(t) \ = \ 0 \qquad (H)$$

- Une **solution** de l'équation (E) est un <u>couple</u> (J, y) où :
  - × l'ensemble J est un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$,
  - × la fonction y est de classe $\mathcal{C}^p$ sur J et vérifie (E) pour tout $t \in J$.
- On appelle **trajectoire** de (E) la courbe représentative d'une des solutions de (E).
- On appelle **équilibre** de (E) une solution <u>constante</u> de (E). On parle aussi de solution **stationnaire**.

Exemples

- L'équation $t\,y^{(3)}(t) + 2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y(t) \;=\; 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3. Son équation homogène associée est $t\,y^{(3)}(t) + 2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y(t) \;=\; 0$.
- L'équation $3\,y^{(3)}(t)+2\,y'(t)-y(t) \;=\; 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants. Son équation homogène associée est $3\,y^{(3)}(t) + 2\,y'(t) - y(t) \;=\; 0$.
- L'équation $t\,y^{(3)}(t) + 2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y^5(t) \;=\; 2\,|t|$ est une équation différentielle non linéaire d'ordre 3. Son équation homogène associée est $t\,y^{(3)}(t) + 2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y^5(t) \;=\; 0$.
- L'équation $2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y(t) \;=\; 2\,|t|$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Son équation homogène associée est $2\,\mathrm{e}^t\,y'(t) - y(t) \;=\; 0$.

Remarque
A priori, les questions d'existence et d'unicité de solutions n'est pas trivial. On verra dans le cours quelques théorèmes positifs à ce sujet. Une autre question sera de trouver *explicitement* des (les/la) solution(s).

I.2. Problème de Cauchy

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $t_0 \in I$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$.

Un **problème de Cauchy** est la donnée :

- d'une équation différentielle d'ordre p :

$$F\big(t, y, y', \ldots, y^{(p)}\big) \;=\; 0$$

- de p **conditions initiales** de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & \alpha_0 \\ y'(t_0) & = & \alpha_1 \\ & \vdots & \\ y^{(p-2)}(t_0) & = & \alpha_{p-2} \\ y^{(p-1)}(t_0) & = & \alpha_{p-1} \end{array}\right.$$

Remarque
On verra, dans le cadre d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2, que les problèmes de Cauchy admettent en général une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ (on peut même démontrer un tel résultat dans un cadre bien plus général mais cela est largement hors de notre programme).

Exemples
Les problèmes suivants sont de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2t\,y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{100} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y' - 2\,\mathrm{e}^t\,y = 5 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

Les problèmes suivants ne sont pas de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2t\,y' - 3y = t^2 + 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y' - 2\,\mathrm{e}^t\,y = 5 \\ y^2(0) = 1 \end{array}\right.$$

Remarque
Des conditions supplémentaires un peu différentes peuvent se poser, comme le problème suivant, sur un segment $[0, T]$:

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + \lambda\, y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(T) = 0 \end{array}\right.$$

Ce type de problème avec conditions « aux bords » est plus délicat. Nous n'énoncerons pas de théorèmes généraux dans ce cas.

I.3. Cas des équations linéaires

Proposition 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit (H) une équation différentielle **linéaire** *homogène d'ordre p.*

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) définies sur un même intervalle I (non vide et non réduit à un point) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre p définie sur I par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \;=\; 0$$

- Tout d'abord, par définition des solutions d'une équation différentielle d'ordre p : $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$.
- Ensuite : $0_{\mathcal{C}^p(I,\mathbb{R})} \in \mathcal{S}_H$. Autrement dit, la fonction nulle est bien solution de (H).
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(f, g) \in \big(\mathcal{S}_H\big)^2$.
  - × On commence par remarquer : $\lambda\, f + \mu\, g \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$.
  - × De plus, pour tout $t \in I$:

$$\begin{array}{rl} & a_p(t)\, (\lambda\, f + \mu\, g)^{(p)}(t) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_1(t)\, (\lambda\, f + \mu\, g)'(t) \quad + \quad a_0(t)\, (\lambda\, f + \mu\, g)(t) \\ = & a_p(t)\, (\lambda\, f^{(p)} + \mu\, g^{(p)})(t) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_1(t)\, (\lambda\, f' + \mu\, g')(t) \quad + \quad a_0(t)\, (\lambda\, f + \mu\, g)(t) \\ & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ = & a_p(t)\, \big(\lambda\, f^{(p)}(t) + \mu\, g^{(p)}(t)\big) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_1(t)\, \big(\lambda\, f'(t) + \mu\, g'(t)\big) \quad + \quad a_0(t)\, \big(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)\big) \\ & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } t\textit{)} \\ = & \lambda\, \big(a_p(t)\ f^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f'(t) + a_0(t)\, f(t)\big) + \mu\, \big(a_p(t)\, g^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, g'(t) + a_0(t)\, g(t)\big) \\ = & \lambda \times 0 + \mu \times 0 \\ & \textit{(car } f \textit{ et } g \textit{ sont solutions de } (H)\textit{)} \\ = & 0 \end{array}$$

  Ainsi, $\lambda\, f + \mu\, g$ est solution de H. Autrement dit : $\lambda\, f + \mu\, g \in \mathcal{S}_H$.

□

Remarque
Pour démontrer cette proposition, on peut aussi remarquer que l'application L suivante est linéaire :

$$\begin{array}{rcll} L & : & \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) & \to \quad \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \\ & & y & \to \quad a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \end{array}$$

De plus : $\mathcal{S}_H = \mathrm{Ker}(L)$. Ainsi, $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2.

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** *définie sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point. On note (H) son équation différentielle linéaire homogène associée.*

Soit f_0 une **solution particulière** *de (L) sur I.*

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_L$ de l'équation L est alors :

$$\{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

On retiendra :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \textit{solution générale} & & \textit{solution particulière} & & \textit{solution générale de} \\ \textit{de } (L) & = & \textit{de } (L) & + & (H) \end{array}}$$

Démonstration.

Soit (L) l'équation différentielle linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ définie sur I par :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ b(t)$$

On note (H) son équation différentielle linéaire homogène associée.

Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
& f \in \mathcal{S}_L \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, f^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f'(t) + a_0(t)\, f(t) = b(t) \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, f^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f'(t) + a_0(t)\, f(t) = a_p(t)\, f_0^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f_0'(t) + a_0(t)\, f_0(t) \\
& \textit{(car } f_0 \textit{ solution de } (L)\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, f^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f'(t) + a_0(t)\, f(t) - \big(a_p(t)\, f_0^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f_0'(t) + a_0(t)\, f_0(t)\big) = 0 \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, \big(f^{(p)}(t) - f_0^{(p)}(t)\big) + \cdots + a_1(t)\, \big(f'(t) - f_0'(t)\big) + a_0(t)\, \big(f(t) - f_0(t)\big) = 0 \\
\Leftrightarrow \ & a_p(t)\, (f - f_0)^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, (f - f_0)'(t) + a_0(t)\, (f - f_0)(t) = 0 \\
& \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
\Leftrightarrow \ & f - f_0 \in \mathcal{S}_H \\
\Leftrightarrow \ & \exists h \in \mathcal{S}_H, \ f - f_0 = h \\
\Leftrightarrow \ & \exists h \in \mathcal{S}_H, \ f = f_0 + h
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien : $\mathcal{S}_L = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$. □

`MÉTHODO` **Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL)**

Pour trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire** :

1) on résout l'équation homogène associée. On note $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble de ses solutions.

2) on recherche d'une solution particulière de l'équation complète. On note cette fonction g.

3) on obtient des solutions de l'EDL complète :

$$\mathcal{S} \ = \ \{g + h \mid h \in \mathcal{S}_H\}$$

Pour le point *2)*, on se réfèrera aux méthodes de recherche d'une solution partiuclière des sections suivantes dans le cas des EDL d'ordre 1 et d'ordre 2.

Proposition 3 (Principe de superposition)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soient (L_1) et (L_2) des équations différentielles **linéaires** *d'ordre p définies sur un intervalle I, non vide et non réduit à un point, par :*

$$\begin{array}{rcll} a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) & = & b_1(t) & \qquad (L_1) \\ a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) & = & b_2(t) & \qquad (L_2) \end{array}$$

Soient f_1 et f_2 des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f_1 \textit{ solution de } (L_1) \\ f_2 \textit{ solution de } (L_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{pour tout } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \textit{ solution de} \\ a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{array}}$$

Démonstration.
Supposons que :

× la fonction f_1 est solution de (L_1),

× la fonction f_2 est solution de (L_2).

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $t \in I$.

$$\begin{array}{cl} & a_p(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(p)}(t) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_1(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(t) \quad + \quad a_0(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \\ = & a_p(t)\, (\lambda_1 f_1^{(p)} + \lambda_2 f_2^{(p)})(t) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_1(t)\, (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(t) \quad + \quad a_0(t)\, (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \\ & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ = & a_p(t)\, \big(\lambda_1 f_1^{(p)}(t) + \lambda_2 f_2^{(p)}(t)\big) \quad + \quad \cdots \quad + \quad a_1(t)\, \big(\lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t)\big) \quad + \quad a_0(t)\, \big(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\big) \\ & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } t\textit{)} \\ = & \lambda_1 \big(a_p(t)\ f_1^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f_1'(t) + a_0(t)\, f_1(t)\big) + \lambda_2 \big(a_p(t)\, f_2^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, f_2'(t) + a_0(t)\, f_2(t)\big) \\ = & \lambda_1 \times b_1(t) + \lambda_2 \times b_2(t) \\ & \textit{(car } f_1 \textit{ solution de } (L_1) \textit{ et } f_2 \textit{ solution de } (L_2)\textit{)} \end{array}$$

On obtient bien que la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de l'équation :

$$a_p(t)\, y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\, y'(t) + a_0(t)\, y(t) \ = \ \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$$

□

Ne pas inventer de théorème !
Dans cette proposition, les équations différentielles linéaires (L_1) et (L_2) ont les mêmes fonctions coefficients a_0, a_1, …, a_p. Seuls les seconds membres diffèrent.

MÉTHODO **Solution particulère d'EDL quand le second membre est une combinaison linéaire**

Soit (L) une équation différentielle **linéaire** d'ordre p de la forme :

$$a_p(t)\,y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = b(t)$$

Supposons que le second membre b de l'équation (L) s'écrit sous la forme :

$$b \;=\; \lambda_1\, b_1 + \lambda_2\, b_2 + \cdots + \lambda_n\, b_n$$

Alors, pour chercher une solution particulière de (L) :

1) on détermine une solution particulière f_1 de l'EDL (L_1) définie par :

$$a_p(t)\,y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = b_1(t)$$

2) on détermine une solution particulière f_2 de l'EDL (L_2) définie par :

$$a_p(t)\,y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = b_2(t)$$

$\vdots$

$\vdots$

n) on détermine une solution particulière f_n de l'EDL (L_n) définie par :

$$a_p(t)\,y^{(p)}(t) + \cdots + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = b_n(t)$$

$(\star)$ Par principe de superposition, l'EDL (L) admet pour solution particulière la fonction f définie par :

$$f \;=\; \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 + \cdots + \lambda_n\, f_n$$

II. Équations différentielles linéaires du premier ordre

II.1. Équation homogène

Proposition 4 (Hors programme)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :

$$y'(t) + a(t)\,y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \text{ solution de } (H) \quad\Leftrightarrow\quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Démonstration.

- Remarquons d'abord que, puisque la fonction a est continue I, elle admet bien une primitive A (de classe $\mathcal{C}^1$ sur I).
- Soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On note z la fonction définie par :

$$z \; : \; \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(t)\mathrm{e}^{A(t)} \end{array}$$

La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $t \in I$:

$$z'(t) \; = \; y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + y(t) \times A'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \; = \; y'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\,y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \; = \; \big(y'(t) + a(t)\,y(t)\big)\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} y \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & \forall t \in I, \; y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, \; \big(y'(t) + a(t)\,y(t)\big)\,\mathrm{e}^{A(t)} = 0 \quad \textit{(car : } \forall t \in I, \; \mathrm{e}^{A(t)} \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, \; z'(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall t \in I, \; z(t) = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall t \in I, \; y(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall t \in I, \; y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \; y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

□

Remarque
Pour retrouver rapidement ce résultat, on pourra raisonner au brouillon sans rigueur (méthode autrement appelée « à la physicienne »).

$$\begin{array}{rcll} y \text{ solution de } (H) & \Rightarrow & y' + a\,y = 0 & \\ & \Leftrightarrow & y' = -a\,y & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{y'}{y} = -a & \textit{(en supposant : } \forall t \in I, \; y(t) \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R}, \; \ln\big(y\big) = -A + \mu & \textit{(en primitivant l'égalité précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \exists \mu \in \mathbb{R}, \; y(t) = \mathrm{e}^{-A(t)+\mu} = \mathrm{e}^{\mu}\,\mathrm{e}^{-A(t)} & \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \; y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} & \end{array}$$

Corollaire 1 (Au programme !).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants sur I définie par :

$$y'(t) + a\,y(t) \;=\; 0$$

Alors :

$$\boxed{y \textit{ solution de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\, e^{-a\,t}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, e^{-a\,t} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 1

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = 0$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = ay$ avec pour condition initiale : $y(0) = 1$.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - t\,y = 0$.

Démonstration.

1) L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2) Comme ce problème comporte une condition initiale, on raisonne en deux temps.

- L'équation $y' - a\,y = 0$, notée (H) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{a\,t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Soit f une solution de (H).
  D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{a\,t}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{c} f \text{ vérifie la condition} \\ \text{initiale } y(0) = 1 \end{array} & \Leftrightarrow & f(0) = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda\, \mathrm{e}^{a \times 0} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \end{array}$$

  On en déduit que l'unique solution de (H) avec pour condition initiale $y(0) = 1$ est la fonction :

$$t \mapsto \mathrm{e}^{a\,t}$$

3) Comme la Proposition 4 est hors programme, on procède comme dans la démonstration.
On note (H) l'équation $y'(t) - t\,y(t) = 0$.

- Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note z la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} z & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & y(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \end{array}$$

  La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z'(t) \;=\; y'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + y(t) \times (-t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \;=\; y'(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - t\,y(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \;=\; \big(y'(t) - t\,y(t)\big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} y \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - t\,y(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \big(y'(t) - t\,y(t)\big)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0 \quad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

II.2. Solution particulière

II.2.a) Solutions remarquables, lorsque a est constante

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ constante	$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ constante
$t \mapsto P_n(t)$, P_n polynôme de degré n	$t \mapsto Q_n(t)$, Q_n polynôme de degré n
$t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -a$	$t \mapsto \mu\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$, $\mu \in \mathbb{R}$
$t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-a\,t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$t \mapsto \mu\,t\,\mathrm{e}^{-a\,t}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Trouver une solution particulère, sur $\mathbb{R}$, des équations différentielles :

1. (E_1) $y' + y = \mathrm{e}^t$

2. (E_2) $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$

Démonstration.

1. Résolvons (E_1).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_1) $y' + y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  Comme le second membre de (E_1) est $t \mapsto \mathrm{e}^t$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^t$ solution de (E_1).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^t$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\, \mathrm{e}^t + \lambda\, \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ 2\lambda\, \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \\ &\Leftrightarrow 2\,\lambda = 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
  Ainsi la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E_1).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est :
$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Résolvons (E_2).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_2) $y' + y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2).
  Comme le second membre de (E_1) est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-t}$ solution de (E_2).
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note alors $h : t \mapsto \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-t}$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + h(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \cancel{\lambda\, t \times (-\mathrm{e}^{-t})} + \cancel{\lambda\, t\, \mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\, \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t} \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$
  Ainsi la fonction $h : t \mapsto t\, \mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E_2).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :
$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + t\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

II.2.b) Méthode de la variation de la constante

MÉTHODO **Méthode de la variation de la constante**

Pour déterminer une solution **particulière** d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre 1 $y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$ définie sur I, on peut appliquer la méthode dite de la variation de la constante. Pour cela, on suit les étapes suivantes :

1) On détermine les solutions de l'équation homogène associée à (L) :

$$\{t \mapsto \lambda\, y_H(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

où $y_H = t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ avec A une primitive de a sur I.

2) On cherche une solution particulière de (L) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$.

a) Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On note alors $h : t \mapsto \lambda(t)\, y_H(t)$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) On raisonne ensuite par équivalence.

$$\begin{array}{rcl} h \text{ solution de } (L) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) + a(t)\, h(t) = b(t) \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = \cdots = g(t) \end{array}$$

La fonction λ cherchée peut cherchée parmi les primitives de g.

c) On détermine de manière explicite une primitive de g sur I. Notons la G.

d) Une solution particulière de (L) est alors : $t \mapsto G(t)\, y_H(t)$.

Exercice 3
Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) $t\,y'(t) + y(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2}$.

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $t\,y' + y = 0$.
  - × Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t\,y'(t) + y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0$$

  - × Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On note z la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} z : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & y(t)\,\mathrm{e}^{\ln(t)} = t\,y(t) \end{array}$$

La fonction z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$z'(t) \ = \ y(t) + t\,y'(t)$$

  - × On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} y \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\,y'(t) + y(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z'(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z(t) = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\,y(t) = \lambda \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (H) est donc :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
On applique la méthode de variation de la constante. Autrement dit, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$.
Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On note alors $h : t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl} h \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\,h'(t) + h(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\[2ex] & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ t\left(\dfrac{\lambda'(t)}{t} - \dfrac{\lambda(t)}{t^2}\right) + \dfrac{\lambda(t)}{t} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\[2ex] & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) - \cancel{\dfrac{\lambda(t)}{t}} + \cancel{\dfrac{\lambda(t)}{t}} = t\,\mathrm{e}^{t^2} \\[2ex] & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \end{array}$$

La fonction λ cherchée peut donc être choisie parmi les primitives de $t \mapsto t\,\mathrm{e}^{t^2}$.
La fonction $\lambda : t \mapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t^2}$ convient.
Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2}$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{2t}\,\mathrm{e}^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

II.3. Problème de Cauchy

Théorème 1. (Problème de Cauchy d'ordre 1)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point :

$$y' + a(t)\,y \;=\; b(t)$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times K$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + a(t)\,y & = & b(t) \\ y(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

Exercice 4

Trouver la solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = \mathrm{ch}$ telle que $y(0) = 0$.

On rappelle que la fonction ch *est définie par* $\mathrm{ch} : t \mapsto \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Démonstration.

- L'équation $y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :

$$\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- On cherche une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est une combinaison linéaire, on cherche :
  × une solution particulière h_1 de (E_1) $y' + y = \mathrm{e}^t$,
  × une solution particulière h_2 de (E_2) $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$.
  Par principe de superposition, la fonction $h = \frac{1}{2}\, h_1 + \frac{1}{2}\, h_2$ sera une solution particulière de (E).
  × D'après l'Exercice 2 ***1.***, la fonction $h_1 : t \mapsto \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E_1).
  × D'après l'Exercice 2 ***2.***, la fonction $h_2 : t \mapsto t\, \mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E_2).
  On en déduit qu'une solution particulière de (E) est $h : t \mapsto \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-t}$.
  Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :
$$\{t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- Soit f une solution de (E).
  D'après le point précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$f : t \mapsto t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-t}$$
  On obtient alors :
$$\begin{array}{rcl} f \text{ vérifie la condition initiale } y(0) = 0 & \Leftrightarrow & f(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow & t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-0} + \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^0 + \frac{1}{2} \times 0 \times \mathrm{e}^{-0} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda + \frac{1}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = -\frac{1}{4} \end{array}$$
  On en déduit que l'unique solution de (E) avec pour condition initiale $y(0) = 0$ est la fonction :
$$t \mapsto -\frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-t}$$

□

Proposition 5.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit a une fonction continue sur I. Soit A une primitive de a sur I.
On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur I définie par :
$$y'(t) + a(t)\, y(t) \;=\; 0$$
On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions :
$$\mathcal{S}_H \;=\; \{t \mapsto \lambda\, e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \;=\; \mathrm{Vect}\,(f)$$
où $f : t \mapsto e^{-A(t)}$.
Alors l'application Φ suivante est un isomorphisme.
$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R} \\ & & g & \mapsto & g(0) \end{array}$$

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
  Alors il existe une fonction g solution du problème de Cauchy d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \ g'(t) + a(t)\, g(t) \ = \ 0 \\ g(0) = x_0 \end{cases}$$

  Ainsi il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $g(0) = x_0$. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(g) = x_0$.
  On en déduit que Φ est surjective.
- On sait :
  × d'abord que Φ est linéaire,
  × ensuite : $\dim(\mathcal{S})_H = 1 = \dim(\mathbb{R})$. En effet, la famille (f) est :
    - libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul,
    - génératrice de $\mathcal{S}_H$.

    C'est donc une base de $\mathcal{S}_H$ et : $\dim(\mathcal{S}_H) = \text{Card}\big((f)\big) = 1$.
  × enfin que Φ est surjective.

  On en déduit que Φ est bijective.

□

III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

III.1. Équation homogène

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathcal{C}^0(I,K)$.

On note (E) l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants définie sur I par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; d(t)$$

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation (E) l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\,r^2 + b\,r + c \;=\; 0$$

On appelle **polynôme caractéristique** associée à l'équation (E) le polynôme Q défini par :

$$Q(X) \;=\; a\,X^2 + b\,X + c$$

Proposition 6.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $a \neq 0$.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \;=\; 0$$

Trois cas se présentent.

(i) **Régime apériodique** *: si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 2 solutions réelles *r_1 et r_2 $(r_1 \neq r_2)$, alors :*

$$\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(ii) **Régime critique** *: si l'équation caractéristique associée à (H) admet* exactement 1 solution réelle *r_0, alors :*

$$\mathcal{S}_H \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, e^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(iii) **Régime pseudo-périodique** *: si l'équation caractéristique associée à (H)* n'admet pas de solution réelle*, alors on ne peut conclure quant à l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ (à notre niveau).*

Démonstration.

(i) On procède par double inclusion.

$(\supset)$ On note $\mathcal{E}$ l'ensemble :

$$\mathcal{E} \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\, t} + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\, t} \end{array} \;\middle|\; (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_1\, t} + \lambda_2\, \mathrm{e}^{r_2\, t}$$

En particulier, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \lambda_1 \, r_1 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} + \lambda_2 \, r_2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t} \\ f''(t) & = & \lambda_1 \, r_1^2 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} + \lambda_2 \, r_2^2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t} \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cll} & a \, f''(t) + b \, f'(t) + c \, f(t) & \\ = & a \left(\lambda_1 \, r_1^2 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} + \lambda_2 \, r_2^2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t}\right) + b \left(\lambda_1 \, r_1^2 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} + \lambda_2 \, r_2^2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t}\right) + c \left(\lambda_1 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} + \lambda_2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t}\right) & \\ = & \lambda_1 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} \left(a \, r_1^2 + b \, r_1 + c\right) + \lambda_2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t} \left(a \, r_2^2 + b \, r_2 + c\right) & \\ = & \lambda_1 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} \times 0 + \lambda_2 \, \mathrm{e}^{r_2 \, t} \times 0 & \textit{(car } r_1 \textit{ et } r_2 \textit{ sont solutions de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \\ = & 0 & \end{array}$$

On en déduit que f est solution de (H), c'est-à-dire : $f \in \mathcal{S}_H$.

$(\subset)$ Soit $f \in \mathcal{S}_H$.
On pose g la fonction définie par :

$$g : t \mapsto f(t) \, \mathrm{e}^{-r_1 \, t}$$

On cherche à montrer que g est solution d'une nouvelle équation différentielle linéaire homogène.

- Tout d'abord, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- On remarque de plus :

  $$f : t \mapsto g(t) \, \mathrm{e}^{r_1 \, t}$$

  D'où :

  $$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & g'(t) \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} + g(t) \, r_1 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} \;=\; \left(g'(t) + r_1 \, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} \\ f''(t) & = & \left(g''(t) + r_1 \, g'(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} + \left(g'(t) + r_1 \, g(t)\right) r_1 \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} \;=\; \left(g''(t) + 2r_1 \, g'(t) + r_1^2 \, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} \end{array}$$

  Or, la fonction f est solution de (H). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{array}{rcll} 0 & = & a \, f''(t) + b \, f'(t) + c \, f(t) & \\ & = & a \left(g''(t) + 2r_1 \, g'(t) + r_1^2 \, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} + b \left(g'(t) + r_1 \, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} + c \, g(t) \, \mathrm{e}^{r_1 \, t} & \\ & = & \left(a \, g''(t) + (2ar_1 + b) \, g'(t) + (ar_1^2 + b \, r_1 + c) \, g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} & \\ & = & \left(a \, g''(t) + (2ar_1 + b) \, g'(t) + \cancel{0 \times g(t)}\right) \mathrm{e}^{r_1 \, t} & \textit{(car } r_1 \textit{ est solution de l'équation caractéristique de } (H)\textit{)} \end{array}$$

  Comme $\mathrm{e}^{r_1 \, t} \neq 0$ et $a \neq 0$, on obtient :

  $$g''(t) + \frac{2ar_1 + b}{a} \, g'(t) \;=\; 0$$

- On en déduit que la fonction g' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

  $$y' + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right) y \;=\; 0$$

On rappelle de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} a\,t^2 + b\,t + c & = & a\,(t - r_1)\,(t - r_2) \\ & = & a\,\big(t^2 - (r_1 + r_2)\,t + r_1\,r_2\big) \\ & = & a\,t^2 - a\,(r_1 + r_2)\,t + a\,r_1\,r_2 \end{array}$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a\,(r_1 + r_2) & = & b \\ a\,r_1\,r_2 & = & c \end{array} \right.$$

En particulier : $-(r_1 + r_2) = \dfrac{b}{a}$. On en déduit que g' est solution de l'équation :

$$y' + \big(2r_1 - (r_1 + r_2)\big)\,y \ = \ 0 \qquad i.e. \qquad y' + (r_1 - r_2)\,y \ = \ 0$$

- D'après la partie précédente du cours, il existe donc $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g' : t \mapsto c_1\,\mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\,t}$$

Comme $r_1 - r_2 \neq 0$, il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g : t \mapsto -\frac{c_1}{r_1 - r_2}\,\mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\,t} + c_2$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & g(t)\,\mathrm{e}^{r_1\,t} \\ & = & \left(-\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}\,\mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)\,t} + c_2\right)\mathrm{e}^{r_1\,t} \\ & = & -\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}\,\mathrm{e}^{r_2\,t} + c_2\,\mathrm{e}^{r_1\,t} \end{array}$$

Ainsi, en posant $\lambda_1 = c_2$ et $\lambda_2 = -\dfrac{c_1}{r_1 - r_2}$, on en déduit :

$$f : t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1\,t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{r_2\,t}$$

On en conclut : $f \in \mathcal{E}$.

(ii) On procède par double inclusion.

($\supset$) On note $\mathcal{F}$ l'ensemble :

$$\mathcal{F} \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array} \ \Big|\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $f \in \mathcal{F}$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f : t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t}$$

En particulier, la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \lambda_1\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,\big(1 \times \mathrm{e}^{r_0\,t} + t \times r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t}\big) \ = \ \big(\lambda_2\,r_0\,t + \lambda_1\,r_0 + \lambda_2\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ f''(t) & = & \lambda_2\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \big(\lambda_2\,r_0\,t + \lambda_1\,r_0 + \lambda_2\big)\,r_0\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \ = \ \big(\lambda_2\,r_0^2\,t + \lambda_1\,r_0^2 + 2\,\lambda_2\,r_0\big)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cl} & a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) \\ = & a\big(\lambda_2\, r_0^2\, t + \lambda_1\, r_0^2 + 2\,\lambda_2\, r_0\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + b\big(\lambda_2\, r_0\, t + \lambda_1\, r_0 + \lambda_2\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + c\, \left(\lambda_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t}\right) \\ = & \mathrm{e}^{r_0\, t} \left(\lambda_1\, \left(a\, r_0^2 + b\, r_0 + c\right) + \lambda_2\, t\, \left(a\, r_0^2 + b\, r_0 + c\right) + \lambda_2\, \left(2\, a\, r_0 + b\right)\right) \\ = & \mathrm{e}^{r_0\, t} \left(\lambda_1 \times 0 + \lambda_2\, t \times 0 + \lambda_2\, \left(2\, a\, r_0 + b\right)\right) \quad \textit{(car r_0 est solution de l'équation caractéristique de (H))} \\ = & \lambda_2\, (2a\, r_0 + b)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{array}$$

On rappelle de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$a\, t^2 + b\, t + c \;=\; a\, (t - r_0)^2 \;=\; a\, (t^2 - 2\, r_0\, t + r_0^2) \;=\; a\, t^2 - 2a\, r_0\, t + a\, r_0^2$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2a\, r_0 & = & b \\ a\, r_0^2 & = & c \end{array} \right.$$

En particulier : $2a\, r_0 + b = 0$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) \;=\; 0$$

On en déduit que f est solution de (H), c'est-à-dire : $f \in \mathcal{S}_H$.

$(\subset)$ Soit $f \in \mathcal{S}_H$.

On pose g la fonction définie par :

$$g : t \mapsto f(t)\, \mathrm{e}^{-r_0\, t}$$

On cherche à montrer que g est solution d'une nouvelle équation différentielle linéaire homogène.

- Tout d'abord, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- On remarque de plus :

  $$f : t \mapsto g(t)\, \mathrm{e}^{r_0\, t}$$

  D'où :

  $$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & g'(t)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + g(t)\, r_0\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \;=\; \big(g'(t) + r_0\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ f''(t) & = & \big(g''(t) + r_0\, g'(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \big(g'(t) + r_0\, g(t)\big)\, r_0\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \;=\; \big(g''(t) + 2r_0\, g'(t) + r_0^2\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{array}$$

  Or, la fonction f est solution de (H). Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{array}{rcl} 0 & = & a\, f''(t) + b\, f'(t) + c\, f(t) \\ & = & a\, \big(g''(t) + 2r_0\, g'(t) + r_0^2\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + b\, \big(g'(t) + r_0\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + c\, g(t)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ & = & \big(a\, g''(t) + (2ar_0 + b)\, g'(t) + (ar_0^2 + b\, r_0 + c)\, g(t)\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ & = & \big(a\, g''(t) + (2ar_0 + b)\, g'(t) + \cancel{0 \times g(t)}\big)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \quad \textit{(car r_0 est solution de l'équation caractéristique de (H))} \end{array}$$

  Comme $\mathrm{e}^{r_0\, t} \neq 0$ et $a \neq 0$, on obtient :

  $$g''(t) + \frac{2ar_0 + b}{a}\, g'(t) \;=\; 0$$

- On en déduit que la fonction g' est solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

  $$y' + \frac{2a\, r_0 + b}{a} y \;=\; 0$$

On rappelle de plus : $2a\,r_0 + b = 0$. On en déduit que g' est solution de l'équation :

$$y' \ = \ 0$$

- D'après la partie précédente du cours, il existe donc $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g' : t \mapsto c_1$$

Il existe donc $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g : t \mapsto c_1\,t + c_2$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ &= (c_1\,t + c_2)\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \\ &= c_2\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + c_1\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\lambda_1 = c_2$ et $\lambda_2 = c_1$, on en déduit :

$$f : t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_0\,t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{r_0\,t}$$

On en conclut : $f \in \mathcal{E}$.

□

Exercice 5
Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 4\,y' - 5\,y = 0$ (E_1)

2. $y'' + 2\,y' + 2\,y = 0$ (E_2)

Démonstration.

1. L'équation (E_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On déterminer donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 + 4\,X - 5$. On note Δ son discriminant.

$$\Delta \ = \ 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) \ = \ 16 + 20 \ = \ 36$$

Les racines de Q sont donc :

$$r_1 \ = \ \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} \ = \ 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 \ = \ \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} \ = \ -5$$

Comme $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-5t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. L'équation (E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On déterminer donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 + 4\,X + 4 = (X+2)^2$. L'unique racine de Q est donc :

$$r_0 \ = \ -2$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est donc :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^{-2t} + \lambda_2\,t\,\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

III.2. Solution particulière

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $a \neq 0$. Soit $d \in \mathcal{C}^0(I, K)$.
On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I par :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) \; = \; d(t)$$

On note Q son polynôme caractérisque.

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	et si...	chercher une solution de la forme...
$t \mapsto \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ constante		$t \mapsto \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ constante
$t \mapsto P_n(t)\, \mathrm{e}^{\alpha\, t}$, P_n polynôme de degré n	α non racine de Q	$t \mapsto R_n(t)\, \mathrm{e}^{\alpha\, t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\, \mathrm{e}^{\alpha\, t}$, P_n polynôme de degré n	α racine **simple** de Q	$t \mapsto R_n(t)\, t\, \mathrm{e}^{\alpha\, t}$, R_n polynôme de degré n
$t \mapsto P_n(t)\, \mathrm{e}^{\alpha\, t}$, P_n polynôme de degré n	α racine double de Q	$t \mapsto R_n(t)\, t^2\, \mathrm{e}^{\alpha\, t}$, R_n polynôme de degré n

Exercice 6
Résoudre l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par : $y'' - 4\, y' + 3\, y = (2t + 1)\, \mathrm{e}^t$.

Démonstration.

- On commence par résoudre l'équation homogène (H) associée à (E) : $y'' - 4\, y' + 3\, y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. On déterminer donc les racines de son polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 - 4\, X + 3 = (X - 1)\, (X - 3)$. Les racines de Q sont donc :
  $$r_1 \; = \; 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 \; = \; 3$$
  Comme $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions de (H) est :
  $$\{t \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^t + \lambda_2\, \mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  Comme le second membre de (E) est $t \mapsto (2t + 1)\, \mathrm{e}^t$ et que 1 est racine simple de Q, on cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto (a\, t + b)\, t\, \mathrm{e}^t$.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note alors $h : t \mapsto (at^2 + bt)\, \mathrm{e}^t$. La fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  $$\begin{aligned} h'(t) \; &= \; (2at + b)\, \mathrm{e}^t + (at^2 + bt)\, \mathrm{e}^t \; = \; \big(at^2 + (2a + b)t + b\big)\, \mathrm{e}^t \\ h''(t) \; &= \; \big(2at + 2a + b\big)\, \mathrm{e}^t + \big(at^2 + (2a + b)t + b\big)\, \mathrm{e}^t \; = \; \big(at^2 + (4a + b)t + 2a + 2b\big)\, \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rl}
& h \text{ solution de } (E) \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ h''(t) - 4\,h'(t) + 3\,h(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \big(at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b\big)\,\mathrm{e}^t - 4\,\big(at^2 + (2a+b)t + b\big)\,\mathrm{e}^t + 3\,(at^2+bt)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ \big((-4at + 2a - 2b\big)\,\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R},\ -4at + 2a - 2b = 2t + 1 \qquad \textit{(car : } \forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0\textit{)} \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} -4a & & & = & 2 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & 1 \\ 2a & - & 2b & = & 1 \end{array}\right. \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & & & = & -1 \\ & - & 2b & = & 2 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & -\dfrac{1}{2} \\ & & b & = & -1 \end{array}\right.
\end{array}$$

Ainsi la fonction $h : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\,t^2 - t\right)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{t \mapsto \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} - \left(\frac{1}{2}\,t^2 + t\right)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

□

III.3. Problème de Cauchy

Théorème 2. (Problème de Cauchy d'ordre 2)

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point :

$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \ = \ d(t)$$

Soit $(t_0, x_0, \tilde{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^2$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) \ = \ d(t) \\ y(t_0) \ = \ x_0 \\ y'(t_0) \ = \ \tilde{x}_0 \end{array}\right.$$

Exercice 7

Trouver l'unique solution de l'équation (E) $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\ \mathrm{sh}(t)$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

On rappelle que la fonction sh *est définie par* $\mathrm{sh} : t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Proposition 7.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On note (H) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants sur I définie par :

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) \ = \ 0$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions :

× *si l'équation caractéristique associée admet 2 solutions distinctes r_1 et r_2 :*

$$\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \lambda_1\, e^{r_1\, t} + \lambda_2\, e^{r_2\, t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$$

où $f_1 : t \mapsto e^{r_1\, t}$ et $f_2 : t \mapsto e^{r_2\, t}$.

× *si l'équation caractéristique associée admet 1 unique solution r_0 :*

$$\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \lambda_1\, e^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, e^{r_0\, t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$$

où $f_1 : t \mapsto e^{r_0\, t}$ et $f_2 : t \mapsto t\, e^{r_0\, t}$.

Alors l'application Φ suivante est un isomorphisme.

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{S}_H & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & g & \mapsto & \big(g(0), g'(0)\big) \end{array}$$

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
  Soit $(x_0, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}$.
  Alors il existe une fonction g solution du problème de Cauchy d'ordre 2 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in I,\ a\, g''(t) + b\, g'(t) + c\, g(t) \ = \ 0 \\ g(0) \ = \ x_0 \\ g'(0) \ = \ \tilde{x}_0 \end{array} \right.$$

  Ainsi il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\big(g(0), g'(0)\big) = (x_0, \tilde{x}_0$. Autrement dit, il existe $g \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(g) = (x_0, \tilde{x}_0)$.
  On en déduit que Φ est surjective.
- On sait :
  × d'abord que Φ est linéaire,
  × ensuite : $\dim(\mathcal{S}_H) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. En effet, la famille (f) est :
    - libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires,
    - génératrice de $\mathcal{S}_H$.

    C'est donc une base de $\mathcal{S}_H$ et : $\dim(\mathcal{S}_H) = \mathrm{Card}\,\big((f_1, f_2)\big) = 2$.
  × enfin que Φ est surjective.

  On en déduit que Φ est bijective.

$\square$

IV. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

IV.1. Définitions

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$.
Soient $b_1, \ldots, b_n$ des fonctions continues sur I.

- On appelle **système différentiel linéaire à coefficients constants** tout système d'équations différentielles de la forme, pour tout $t \in I$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1'(t) & = & a_{1,1}\,x_1(t) & + & a_{1,2}\,x_2(t) & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n(t) & + & b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{2,1}\,x_1(t) & + & a_{2,2}\,x_2(t) & + & \cdots & + & a_{2,n}\,x_n(t) & + & b_2(t) \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ x_n'(t) & = & a_{n,1}\,x_1(t) & + & a_{n,2}\,x_2(t) & + & \cdots & + & a_{n,n}\,x_n(t) & + & b_n(t) \end{array}\right. \qquad (E)$$

  d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$ des fonctions dérivables sur I.
- Les réels $a_{i,j}$ sont appelés **coefficients** du système linéaire.
- On peut ré-écrire ce système différentiel sous la forme, pour tout $t \in I$:

$$X'(t) \;=\; A\,X(t) + B(t)$$

  où

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,n} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad X(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B(t) \;=\; \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

- On appelle **système différentiel homogène** associé à (E) le système défini, pour tout $t \in I$ par :

$$X'(t) \;=\; A\,X(t) \qquad (H)$$

⚠ On notera que X et B sont des <u>fonctions</u> de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Écrire sous forme matriciel le système d'équation différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(y(t) + z(t)\big) \\ y'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(x(t) + z(t)\big) \\ z'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(x(t) + y(t)\big) \end{array}\right.$$

Commentaire

On peut bien sûr utiliser les résultats sur les équations différentielles scalaires pour résoudre des systèmes différentiels.

Exercice 9

Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & y \\ y' & = & x \end{array}\right.$.

IV.2. États d'équilibre et trajectoires

IV.2.a) États d'équilibre

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On appelle **état d'équilibre** (ou **point d'équilibre**) du système différentiel (H) toute solution $X_0 : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in I, \; A\,X_0(t) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Théorème 3.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Alors :

$$X_0 \text{ état d'équilibre de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \; X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$X_0 \text{ état d'équilibre de } (H) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{les coordonnées de } X_0 \text{ sont} \\ \text{des fonctions constantes sur } I \end{array}$$

Démonstration.

Soit X_0 une solution de (H). Alors il existe des fonctions x_1, ..., x_n définies sur I telles que :

$$\forall t \in I, \quad X_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

On remarque :

$$\begin{array}{rcl} X_0 \text{ état d'équilibre} & \Leftrightarrow & \forall t \in I, \; A\,X_0(t) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, \; X_0'(t) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \qquad \textit{(car } X_0 \textit{ est solution de } (H)\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in I, \; \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \; \forall t \in I, \; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \; X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$\square$

Proposition 8.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
Alors :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{l'unique état d'équilibre de } (H) \text{ est } t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que la matrice A est inversible.
Soit X_0 une solution de (H).

$$\begin{aligned} X_0 \text{ point d'équilibre de } (H) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I,\ A\,X_0(t) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I,\ A^{-1}\,A\,X_0(t) = A^{-1} \times 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I,\ X_0(t) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

L'unique état d'équilibre de (H) est donc bien la fonction :

$$X_0 \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

($\Leftarrow$) Supposons que l'unique état d'équilibre de (H) est $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Soit $t \in I$. Le système $A\,X(t) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ est un système de Cramer (système de n équations à n inconnues).
Ce système de Cramer admet une unique solution. La matrice A est donc inverible.

□

Exercice 10
Déterminer les états stables du système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(y(t) + z(t)\big) \\ y'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(x(t) + z(t)\big) \\ z'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(x(t) + y(t)\big) \end{array} \right.$$

IV.2.b) Trajectoires

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de (H).

Alors l'ensemble $\{\ \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est appelé **trajectoire** du système différentiel (H).

Commentaire

Notons que la trajectoire d'un état d'équilibre est réduite à un unique vecteur.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une solution de (H).

- On dit que la trajectoire $\{\ \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \mid t \in \mathbb{R}\}$ **converge vers** $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ si :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i$$
- S'il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \dots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire **diverge**.

Commentaire

La trajectoire d'un état d'équilibre est toujours convergente.

MÉTHODO **Démontrer qu'une trajectoire est divergente**

Pour montrer qu'une trajectoire $\{\ \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est divergente, il suffit de démontrer que l'une des coordonnées x_i vérifie :
$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) \ = \ \pm\infty$$

Exercice 11

On considère le sytème différentiel (S) suivant :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \frac{1}{2}\ \big(y(t) + z(t)\big) \\ y'(t) & = & \frac{1}{2}\ \big(x(t) + z(t)\big) \\ z'(t) & = & \frac{1}{2}\ \big(x(t) + y(t)\big) \end{array} \right.$$

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions de (S) :
$$X_1 \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad X_2 \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Les trajectoires définies par les solutions précédentes sont-elles convergentes ?

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Lorsque toutes les trajectoires du système (H) convergent vers un même état d'équilibre, on dit que cet état d'équilibre est **stable**.

Exercice 12
Le système différentiel de l'exercice 9 admet-il un état stable ?

IV.3. Problème de Cauchy

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soient $t_0 \in I$ et $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Un **problème de Cauchy** est la donnée :

- d'un système différentiel :
$$X' \;=\; A\,X$$
- d'une **condition initiale** de la forme :
$$X(t_0) \;=\; \tilde{X}_0$$

Autrement dit, c'est la donnée du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall t \in I,\ X'(t) = A\,X(t) \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i(t_0) = \tilde{x}_0 \end{array}\right.$$

Théorème 4.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soient $t_0 \in I$ et $\tilde{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & A\,X \\ X(t_0) & = & \tilde{X}_0 \end{array}\right.$$

Exercice 13

1. Montrer que si X est une solution non nulle de $X' = A\,X$, alors X ne s'annule en aucun point de I.

2. Montrer que si X_1 et X_2 sont deux solutions distinctes de l'équation différentielle (H), alors : $\forall t \in I$, $X_1(t) \neq X_2(t)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution du système différentiel $X' = \lambda\,X$ satisfaisant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

IV.4. Résolution du système homogène

IV.4.a) Généralités

Proposition 9.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).

Alors $\mathcal{S}_H$ est un espace vectoriel.

Théorème 5.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $t_0 \in I$.

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).

L'application Φ suivante est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{S}_H & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ & & X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$$

En particulier : $\dim\big(\mathcal{S}_H\big) = n$.

Démonstration.

- La fonction Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et linéarité de l'évaluation en 0.
- Montrons que Φ est surjective.
  Soient $t_0 \in I$ et $\tilde{X}_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  Alors il existe une fonction X solution du problème de Cauchy suivant :
  $$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in I,\ X'(t) = A\,X(t) \\ X(t_0) \ = \ \tilde{X}_0 \end{array} \right.$$
  Ainsi il existe $X \in \mathcal{S}_H$ tel que : $X(t_0) = \tilde{X}_0$. Autrement dit, il existe $X \in \mathcal{S}_H$ tel que : $\Phi(X) = \tilde{X}_0$.
  On en déduit que Φ est surjective.
- Montrons que Φ est injective.
  Soit $X \in \mathcal{S}_h$.
  $$\begin{array}{rcl} X \in \mathrm{Ker}(\Phi) & \Leftrightarrow & \Phi(X) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & X(t_0) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & X \text{ solution du problème de Cauchy } \left\{ \begin{array}{l} X' = A\,X \\ X(t_0) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$
  Or :
  × La fonction nulle $0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^I} : t \mapsto 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ est solution de ce problème de Cauchy,
  × ce problème de Cauchy admet une unique solution.
  On en déduit :
  $$X \in \mathrm{Ker}(\Phi) \ \Leftrightarrow \ X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^I}$$
  Ainsi : $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^I}\}$. L'application Φ est donc injective.

Finalement, l'application Φ est :

× linéaire,

× injective et surjective, donc bijective.

C'est donc un isomorphisme. En particulier :

$$\dim\left(\mathcal{S}_H\right) \; = \; \dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) \; = \; n$$

□

IV.4.b) Cas où A est diagonalisable

Proposition 10.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

Alors la fonction $X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, t}\, X_0$ est solution du système différentiel $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On note $X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\, t}\, X_0 = \begin{pmatrix} c_1\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \\ \vdots \\ c_n\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- D'une part :

$$X'(t) \; = \; \begin{pmatrix} \lambda\, c_1\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \\ \vdots \\ \lambda\, c_n\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \end{pmatrix} \; = \; \lambda \begin{pmatrix} c_1\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \\ \vdots \\ c_n\, \mathrm{e}^{\lambda\, t} \end{pmatrix} \; = \; \lambda\, X(t)$$

- D'autre part, comme X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ :

$$A\, X(t) \; = \; \mathrm{e}^{\lambda\, t} \cdot A\, X_0 \; = \; \mathrm{e}^{\lambda\, t}\, \lambda \cdot X_0 \; = \; \lambda\, A$$

Finalement : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A\, X(t)$.

La fonction X est donc solution du système différentiel $X' = A\, X$. □

Théorème 6. (HP)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

- *Supposons que A est* **diagonalisable**. *On note :*
  × *$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes),*
  × *$(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constitutée de vecteurs propres de A telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur U_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre α_i.*

Alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de (H) est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H \; &= \; \{t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e^{\alpha_i\, t}\, U_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \; \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

où $f_1 : t \mapsto e^{\alpha_1\, t}\, U_1$, …, $f_n : t \mapsto e^{\alpha_n\, t}\, U_n$.

Proposition 11.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $X : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction dérivable sur I (i.e. dont chaque fonction coordonnée est dérivable sur I).

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors la fonction $Y = B\,X$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) \;=\; B\,X'(t)$$

On retiendra :

$$(B\,X)' \;=\; B\,X'$$

MÉTHODO **Résolution de $X' = AX$ dans le cas A diagonalisable**

Pour résoudre le système différentiel $X' = AX$, noté (H), dans le cas où A est diagonalisable, on procède de la façon suivante.

1. On détermine les valeurs propres de A.

2. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres de A.

3. On démontre que A est diagonalisable et on obtient :
   - × une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible qui est la concaténation des bases des sous-espaces propres de A,
   - × une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

   telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Soit $X : I \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} X \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & X' = A\,X & \\ & \Leftrightarrow & X' = PDP^{-1}X & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}X' = DP^{-1}X & \\ & \Leftrightarrow & (P^{-1}\,X)' = D\,(P^{-1}\,X) & \\ & \Leftrightarrow & Y' = DY & \qquad \textit{(où } Y = P^{-1}X\textit{)} \end{array}$$

5. On résout le système $Y' = DY$ grâce aux résultats sur les équations différentielles linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

6. On en déduit les solutions de (H) en calculant : $X = PY$.

Exercice 14

On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & A\,X \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Démonstration.

- Déterminons les valeurs propres de A.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(A - \lambda\, I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (2-\lambda)^2 - 1 \\ & = & (2-\lambda-1)\,(2-\lambda+1) \\ & = & (1-\lambda)\,(3-\lambda) \end{array}$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) & \Leftrightarrow & A - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda\, I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \ \texttt{OU} \ \lambda = 3 \end{array}$$

  On en déduit : $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.

- On remarque que :
  × $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,
  × A admet 2 valeurs propres distinctes.

  Cette matrice est donc diagonalisable.

- Déterminons $E_1(A)$. Soit $U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(A) & \Leftrightarrow & (A - I_2)\, U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \ x + y = 0 \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ x = -y \right. \end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -y\} \ = \ \{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- On démontre de même : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Comme A est diagonalisable, alors il existe :
  × une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible qui est la concaténation des bases des sous-espaces propres de A,
  × une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale donc les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

  telles que : $A = PDP^{-1}$. On obtient ici :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} X \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & X' = A\,X & \\ & \Leftrightarrow & X' = PDP^{-1}X & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}X' = DP^{-1}X & \\ & \Leftrightarrow & (P^{-1}\,X)' = D\,(P^{-1}\,X) & \\ & \Leftrightarrow & Y' = DY & \qquad \textit{(où } Y = P^{-1}X\textit{)} \end{array}$$

- Résolvons alors le système $Y' = D\,Y$, noté (H').
Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe deux fonctions y_1 et y_2 telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) \ = \ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} Y' = DY & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcll} y_1' & = & y_1 & \\ y_2' & = & & 3\,y_2 \end{array} \right. \\ \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} \\ y_2(t) & = & \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_{H'}$ de (H') est :

$$\mathcal{S}_{H'} \ = \ \{t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} \\ \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Revenons à la résolution de (H).
Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \text{ solution de } (H) & \Leftrightarrow & Y' = DY \quad \textit{(où } Y = P^{-1}X\textit{)} \\ \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} \\ \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \\ \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}\,X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} \\ \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \\ \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} \\ \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \\ \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} \\ \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \\ \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de (H) est :

$$\mathcal{S}_H \ = \ \{t \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ \lambda_1\,\mathrm{e}^{t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Il reste enfin à trouver l'unique solution du problème de Cauchy.
  Soit $X \in \mathcal{S}_H$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \\ \lambda_1\,\mathrm{e}^t + \lambda_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}
X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex]
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 2 \\ & & 2\,\lambda_2 & = & 2 \end{array} \right. \\[2ex]
& \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,\lambda_1 & & & = & 2 \\ & & 2\,\lambda_2 & = & 2 \end{array} \right. \\[2ex]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} \lambda_1 & & & = & -1 \\ & & \lambda_2 & = & 1 \end{array} \right.
\end{array}$$

  Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy est la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Théorème 7.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Supposons que A est **diagonalisable**.

- *Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires de (H) convergent vers un état d'équilibre.*
- *Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires de (H) divergentes.*

Exercice 15

1. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(y(t) + z(t)\big) \\[1ex] y'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(x(t) + z(t)\big) \\[1ex] z'(t) & = & \frac{1}{2}\,\big(x(t) + y(t)\big) \end{array} \right.$$

2. Les trajectoires de ce système sont-elles convergentes ou divergentes ?

Commentaire

Dans le cas où A n'est pas diagonalisable, on se laisse guider par l'énoncé. On donne ci-dessous un exemple d'un tel cas.

Exercice 16
On considère le système différentiel défini sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2\,y & - & 2\,z \\ y' & = & -4\,x & - & 3\,y & + & 4\,z \\ z' & = & -2\,x & & & + & z \end{array}\right. \qquad (E)$$

où x, y et z sont trois fonctions inconnues de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donner une matrice A telle que :

$$(E) \Leftrightarrow X' = AX$$

2. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de A et leurs sous-espaces propres associés.

b) On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

c) Déterminer la matrice T telle que : $T = P^{-1}AP$.

3. ***a)*** Résoudre, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'équation $f' = -f + 2\,c\,\mathrm{e}^{-t}$.

b) On note : $Y = P^{-1}\,X$. Démontrer :

$$X' \ = \ A\,X \quad \Leftrightarrow \quad Y' \ = \ T\,Y$$

c) Résoudre le système différentiel $Y' = T\,Y$.

4. En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ du système $X' = A\,X$.

5. En déduire une solution non stationnaire (*i.e.* non constante) qui converge vers l'unique état d'équilibre du système (E).

IV.4.c) Cas où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et A diagonalisable

Proposition 12.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On note : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

On note (H) le système différentiel $X' = AX$ défini sur $\mathbb{R}$.

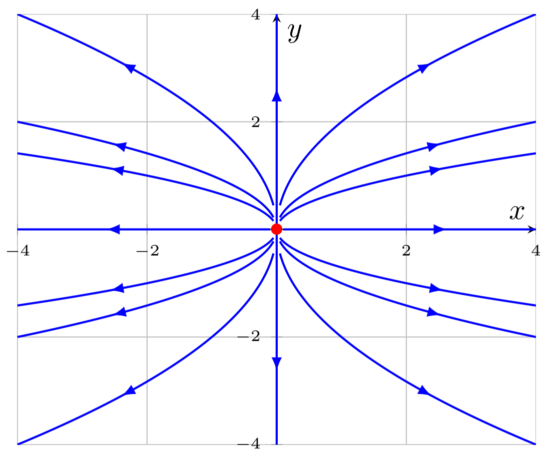
Cinq cas se présentent.

1. *Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, alors*

× *aucune des trajectoires non stationnaires de (H) n'est convergente.*

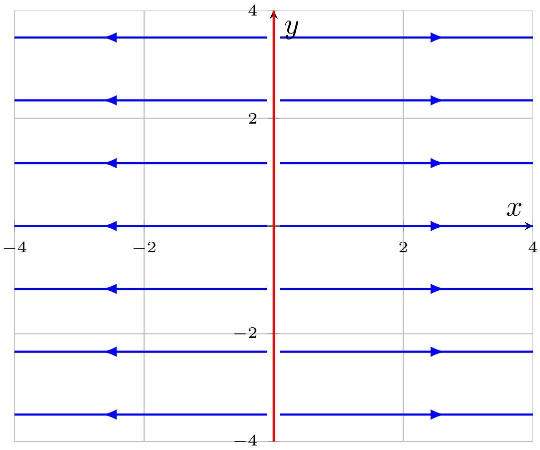
× *le système (H) admet un unique point d'équilibre $(0, 0)$*

× *ce point d'équilibre est instable.*



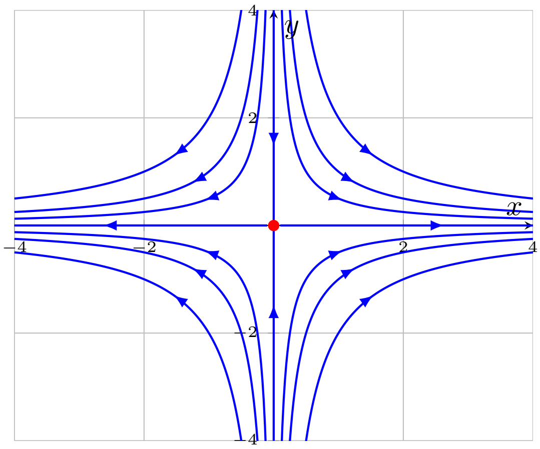
2. *Si $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$, alors :*

- *aucune des trajectoires non stationnaires de (H) n'est convergente.*
- *le système (H) admet une infinité de points d'équilibre.*
- *tous ces points d'équilibre sont instables.*



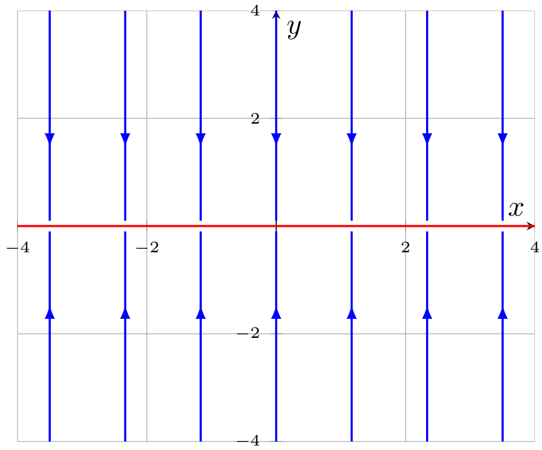
3. *Si $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, alors :*

- *toutes les trajectoires de (H) sauf 2 sont divergentes.*
- *le système différentiel (H) admet $(0,0)$ comme unique point d'équilibre.*
- *les deux trajectoires non divergentes convergent vers le point d'équilibre. On dit que ce point d'équilibre est un* **point selle**.



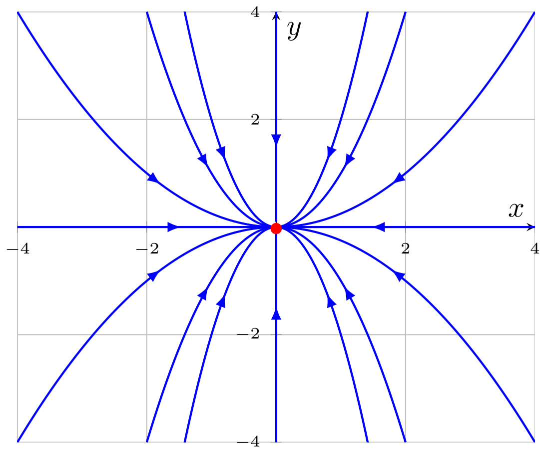
4. *Si $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$, alors :*

- *toutes les trajectoires de (H) sont convergentes.*
- *le système (H) admet une infinité de points d'équilibre.*
- *tous ces points d'équilibre sont stables.*



5. *Si $0 > \lambda_1 > \lambda_2$, alors :*

- *toutes les trajectoires de (H) sont convergentes.*
- *le système (H) admet $(0, 0)$ comme unique point d'équilibre.*
- *ce point d'équilibre est stable.*



Remarque

Le tableau suivant récapitule la nature des points d'équilibre du système différentiel $X' = AX$ suivant le signe des valeurs propres de A.

λ_1 \ λ_2	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0$	unique et stable	une infinité et stables	unique et point selle
$\lambda_1 = 0$	une infinité et stables	une infinité et stables	une infinité et instables
$\lambda_1 > 0$	unique et point selle	une infinité et instables	unique et instable

Démonstration.
Soit $X : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$X' = A\,X \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \lambda_1\,x \\ y' & = & \lambda_2\,y \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{R},\; \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & x(0)\,\mathrm{e}^{\lambda_1\,t} \\ y(t) & = & y(0)\,\mathrm{e}^{\lambda_2\,t} \end{array}\right.$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $x(0) = 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$.
  Autrement dit, la fonction x est la fonction nulle.
- Si $x(0) \neq 0$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) \neq 0$.
  Autrement dit, la fonction x ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.
  Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x(t)}{x(0)} = \mathrm{e}^{\lambda_1\,t} > 0$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$t \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\,\ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)$$

  On en déduit :

  $$y(t) \;=\; y(0)\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

  En écrivant cette égalité sous la forme d'une égalité de fonctions, on obtient :

  $$y \;=\; y(0)\left(\frac{x}{x(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

On obtient les différents cas à l'aide de la formule précédente, puis en intervertissant le rôle de x et y. □

IV.5. Lien avec les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On note (E) l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) \;=\; 0$$

On pose alors :

$$X \;=\; \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire l'équivalence suivante :

$$(E) \quad\Leftrightarrow\quad X' \;=\; A\,X$$

On peut alors déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) avec les méthodes de résolution des systèmes différentiels.

1. On commence par déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(A - \lambda\,I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & \lambda\,(a+\lambda) + b \\ & = & \lambda^2 + a\,\lambda + b \;=\; Q(\lambda) \end{array}$$

On retrouve le polynôme Q caractéristique de (E).
On obtient :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow Q(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Trois cas se présentent alors.

- Si Q admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \{r_1, r_2\}$.

  2. On sait alors :
  - $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,
  - A admet 2 valeurs propres distinctes.

  La matrice A est donc diagonalisable.

  3. On démontre aisément :

$$\dim\big(E_{r_1}(A)\big) \ = \ 1 \quad \text{et} \quad \dim\big(E_{r_2}(A)\big) \ = \ 1$$

  On note $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ une base de $E_{r_1}(A)$, et $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ une base de $E_{r_2}(A)$.
  On peut alors écrire $A = PDP^{-1}$ où :

$$P \ = \ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D \ = \ \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

  4. De plus :

$$\begin{aligned} X' = A\,X &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}\,X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}\,X' = DP^{-1}\,X \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}\,X)' = D\,(P^{-1}\,X) \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \qquad\qquad \textit{(où } Y = P^{-1}\,X\textit{)} \end{aligned}$$

  5. Résolvons alors le système $Y' = DY$, noté (H').
  Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe deux fonctions y_1 et y_2 telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) \ = \ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y' = DY &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' &=& r_1\,y_1 \\ y_2' &=& r_2\,y_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) &=& \mu_1\,\mathrm{e}^{r_1\,t} \\ y_2(t) &=& \mu_2\,\mathrm{e}^{r_2\,t} \end{array} \right. \end{aligned}$$

  On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_{H'}$ de (H') est :

$$\mathcal{S}_{H'} \ = \ \{t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1\,\mathrm{e}^{r_1\,t} \\ \mu_2\,\mathrm{e}^{r_2\,t} \end{pmatrix} \mid (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

6. Revenons à la résolution de (E).

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow X' = AX \\ &\Leftrightarrow Y' = DY \\ &\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} \mu_1 \, \mathrm{e}^{r_1 t} \\ \mu_2 \, \mathrm{e}^{r_2 t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1} X(t) = \begin{pmatrix} \mu_1 \, \mathrm{e}^{r_1 t} \\ \mu_2 \, \mathrm{e}^{r_2 t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} \mu_1 \, \mathrm{e}^{r_1 t} \\ \mu_2 \, \mathrm{e}^{r_2 t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = u_1 \, \mu_1 \, \mathrm{e}^{r_1 t} + u_2 \, \mu_2 \, \mathrm{e}^{r_2 t} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E) est :

$$\mathcal{S}_E \ = \ \{t \mapsto \lambda_1 \, \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \, \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si Q admet une unique racine r_0, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \{r_0\}$.

  2. On peut démontrer, en raisonnant par l'absurde, que la matrice A n'est pas diagonalisable car $A \neq r_0 \, I_2$.

  3. On démontre aisément :

  $$\dim \big(E_{r_0}(A)\big) \ = \ 1$$

  On note $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ une base de $E_{r_0}(A)$.
  Soit $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ non colinéaire à U_0. Alors (U_0, U_1) forme une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (à démontrer proprement) et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, en notant :

  $$P \ = \ \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T \ = \ \begin{pmatrix} r_0 & c \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

  on obtient : $A = PTP^{-1}$.
  (on peut démontrer, en raisonnant par l'absurde, que T s'écrit forcément sous cette forme (et non $\begin{pmatrix} r_0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$ où $d \neq r_0$) sinon A admettrait deux valeurs propres distinctes, ce qui n'est pas le cas)

  4. De plus :

  $$\begin{aligned} X' = A\, X &\Leftrightarrow X' = PTP^{-1}\, X \\ &\Leftrightarrow P^{-1}\, X' = TP^{-1}\, X \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}\, X)' = T\, (P^{-1}\, X) \\ &\Leftrightarrow Y' = TY \qquad\qquad \textit{(où } Y = P^{-1}\, X\textit{)} \end{aligned}$$

5. Résolvons alors le système $Y' = TY$, noté (H').
Soit $Y : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors il existe deux fonctions y_1 et y_2 telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) \ = \ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Y' = TY \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & c \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & r_0\, y_1 + c\, y_2 \\ y_2' & = & r_0\, y_2 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \exists \mu_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & r_0\, y_1 + \mu_1\, c\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ y_2(t) & = & \mu_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & \mu_2\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \mu_1\, c\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ y_2(t) & = & \mu_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{array} \right. \qquad \textit{(à démontrer proprement)}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_{H'}$ de (H') est :

$$\mathcal{S}_{H'} \ = \ \{t \mapsto \begin{pmatrix} \mu_2\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \mu_1\, c\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ \mu_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{pmatrix} \mid (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

6. Revenons à la résolution de (E).

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad X' = AX \\
& \Leftrightarrow \quad Y' = TY \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} \mu_2\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \mu_1\, c\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ \mu_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}\, X(t) = \begin{pmatrix} \mu_2\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \mu_1\, c\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ \mu_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} \mu_2\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \mu_1\, c\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \\ \mu_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = (u_0\, \mu_2 + u_1\, \mu_1)\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + u_0\, \mu_1\, c\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E) est :

$$\mathcal{S}_E \ = \ \{t \mapsto \lambda_1\, \mathrm{e}^{r_0\, t} + \lambda_2\, t\, \mathrm{e}^{r_0\, t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

- Si Q n'admet pas de racine, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \varnothing$. Dans ce cas, on ne peut pas conclure.

IV.6. Équations différentielles d'ordre supérieur à 3

Illustrons la résolution de ce type d'équation différentielle sur un exemple.

Exercice 17
On note (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants homogène définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y^{(4)}(t) - 5\,y^{(3)}(t) + 5\,y''(y) + 5\,y'(t) - 6\,y(t) \;=\; 0$$

1. Soit $y \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice A telle que :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad X' = AX$$

2. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2, 3\}$.

b) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont placés dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

3. ***a)*** On note $Y = P^{-1}X$. Démontrer :

$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad Y' = DY$$

b) Résoudre le système différentiel $Y' = DY$.

4. En déduire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de l'équation différentielle (E).