Systèmes linéaires

I. Définitions

Définition (Équation linéaire à p inconnues)
On appelle *équation linéaire* à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b,$$

dans laquelle $a_1, a_2, \dots, a_p, b$ sont $(p+1)$ réels donnés.
Une solution de cette équation est un p-uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ vérifiant l'égalité $a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, \dots, a_p\alpha_p = b$.

Remarque Résoudre dans $\mathbb{R}$ une telle équation, c'est déterminer l'ensemble des p-uplets de réels qui en sont les solutions. Cet ensemble des solutions est donc une partie de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 1
L'équation $x_1 - x_2 - 2x_3 = 4$ est une équation linéaire à trois inconnues, dont le triplet $(5, 1, 0)$ est une solution.

⚠ L'ordre des éléments du triplet est important : $(0, 1, 5)$, par exemple, n'est pas solution de cette équation.

Définition (Système linéaire à n équation à p inconnues)
On appelle *système linéaire à n équations à p inconnues* tout système de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_n & = & b_n \end{array}$$

où pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, les $a_{i,j}$ sont des réels fixés appelés *coefficients du système*, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les b_j sont appelés des réels fixés appelés *second membre du système* et pour $1 \leqslant j \leqslant p$ les x_j sont appelés *inconnues du système.*
Lorsque les b_i sont tous nuls, on parle de *système homogène.*
Tout p-uplets de réels $(x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant le système d'équation est appelée *solution du sytème.*

Remarque Résoudre un tel système, c'est trouver l'ensemble des p-uplets de réels $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifient simultanément les n équations qui le composent (attention à l'ordre des inconnues). L'ensemble des solutions peut aussi bien être l'ensemble vide qu'un singleton ou une partie infinie de $\mathbb{R}^p$. Notons que les équations sont souvent appelées *lignes* du système.

Exemple 2
Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & & & = & -1 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$ est un système linéaire de 4 équations à 3 inconnues

Remarque Les systèmes linéaires d'équations n'admettent pas nécessairement de solutions. En fait, un système linéaire d'équations peut admettre soit 0, soit 1 ou soit une infinité de solutions et il n'y a pas d'autres cas de figure.

Remarque L'ensemble des solutions d'un système homogène n'est jamais vide : il contient toujours la solution triviale $(0, 0, \ldots, 0)$.

Définition (Système de Cramer)
Un système linéaire à n équations à n inconnues est appelé *système de Cramer* lorsqu'il admet une et une seule solution.

Définition (Système triangulaire)
On appelle *système échelonné ou système triangulaire* tout système linéaire de n équations à p inconnues dont les coefficients $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ satisfont que pour tout $i > j$, $a_{i,j} = 0$.

Exemples

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & 3z & + & 2t & = & 2 \\ & & 4y & + & 2z & - & 2t & = & 8 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & 2y & - & 4z & = & -2 \\ & & & & 3z & = & -6 \end{array}\right.$$

Remarque Cette forme de système est particulièrement intéressante car elle permet de résoudre rapidement le système.

- $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2y & - & 3z & + & 2t & = & 2 & (L_1) \\ & & 4y & + & 2z & - & 2t & = & 8 & (L_2) \end{array}\right.$$

  1. L'équation (L_2) nous donne directement $4y = 8 - 2z + 2t$, soit $y = 2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t$,
     on remplace alors tous les y par $2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t$,
  2. L'équation (L_1) nous donne alors $2x - 2(2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t) - 3z + 2t = 2$, soit $x = 3 + 2z - t$

  Les solutions du systèmes sont donc $\left\{(3 + 2z - t, 2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t, z, t), \quad z \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

- $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 & (L_1) \\ & & 2y & - & 4z & = & -2 & (L_2) \\ & & & & 3z & = & -6 & (L_3) \end{array}\right.$$

  1. L'équation (L_3) nous donne directement $3z = -6$, soit $z = -2$,
     on remplace alors tous les z par -2,
  2. L'équation (L_2) nous donne $2y - 4 \times (-2) = -2$, soit $y = -5$,
     on remplace alors tous les y par -5,
  3. La dernière équation (L_1) nous donne $x - 2 \times (-5) + 3 \times (-2) = 1$, soit $x = -3$.

  La solution du système est donc $(-3, -5, -2)$.

Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants.

$$(S_1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 7 \\ & - & y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_2)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 2y & - & z & - & 4t & = & 2 \\ & & & & z & + & 2t & = & -2 \end{array}\right.$$

L'une des méthodes de résolution d'un système consiste à chercher des systèmes *équivalents* au système initial, c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions que lui, pour arriver au bout de plusieurs étapes à un système facile à résoudre. Ceci soulève deux questions :

- Comment être sûr que le système transformé est bien équivalent au système initial ? En d'autres termes, quelles transformations peut-on appliquer au système étudié en ayant la certitude d'obtenir un système équivalent ?
- Quels sont les systèmes faciles à résoudre ?

La réponse à la deuxième question nous donnera le but à atteindre, la façon d'y parvenir sera donnée par la première.

II. Opérations élémentaires sur les lignes

Pour transformer un système initial en un système équivalent, on s'autorise trois opérations simples :

- l'échange de 2 lignes.
- la multiplication d'une ligne par un réel **non nul**.
- l'ajout, à une ligne, du produit d'une autre ligne par un réel quelconque.

1. **L'échange des lignes numéros i et j** du système est noté $L_i \leftrightarrow L_j$.
Dans l'exemple suivant, on échange les lignes 1 et 3 du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 3y & - & z & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Si un triplet de réels est solution du premier système, il l'est bien sûr aussi du second, et réciproquement : les systèmes sont bien équivalents. On démontre qu'il est possible par des échanges de lignes successifs, d'écrire les équations d'un système dans n'importe quel ordre. Quel que soit cet ordre, on obtient ainsi toujours un système équivalent au système initial.

2. **La multiplication de la ligne numéro i par le réel λ non nul** est notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
Dans l'exemple suivant, on multiplie les deux membres de la première équation du système (la première ligne) par le même réel *non nul* 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Si un triplet de réels est solution de l'équation L_i, il l'est bien sûr aussi de l'équation λL_i. Réciproquement, supposons qu'un triplet de réels soit solution de λL_i, alors, comme le réel λ est non nul, on peut multiplier les 2 membres de l'équation λL_i par $\dfrac{1}{\lambda}$, et on retombe ainsi sur l'équation L_i. Les deux systèmes sont donc équivalents.

3. **L'ajout, à la ligne numéro i, du produit de la ligne numéro j par le réel λ** est noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Dans l'exemple suivant, on remplace la deuxième ligne du système par l'équation obtenue en lui ajoutant le triple de la première :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 5x & - & 5y & + & 7z & = & 6 \\ & & 3y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Si un triplet de réels est solution de l'équation L_i et de l'équation L_j, il l'est bien sûr aussi de l'équation $L_i + \lambda L_j$. Réciproquement, supposons qu'un triplet de réels soit solution de $L_i + \lambda L_j$ et de l'équation L_j (qui est toujours présente dans le système transformé). Il est alors solution de l'équation $(L_i + \lambda L_j) - \lambda L_j$, c'est-à-dire de L_i. Les deux systèmes sont donc équivalents.

⚠ Lorsqu'on fait successivement des opérations élémentaires, il ne faut pas oublier que les lignes L_i changent. On n'hésitera donc pas à réécrire le système après chaque opération.

III. Méthode du pivot

Le but de la *méthode du pivot*, aussi appelée *méthode de Gauss*, est de parvenir, à l'aide des opérations élémentaires, à un système triangulaire proche du système précédent. Cette méthode présente l'avantage d'être systématique : elle ne demande pratiquement pas de réflexion, et elle garantit d'arriver au résultat. De plus, elle est économique, au sens où elle demande peu de calculs par rapport à d'autres méthodes. Elle est également facile à programmer.

Définition (Systèmes équivalents)
Soit (S) et (S') deux systèmes linéaires d'équations à n équations à p inconnues. On dit que ces deux systèmes sont *équivalents* si (S') s'obtient à partir de (S) par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes.

Théorème 1.
Soit (S) et (S') deux systèmes linéaires à n équations à p inconnues tel que (S) et (S') soient équivalents. Alors l'ensemble de solutions de (S') est le même que celui de (S).

Théorème 2 (Algorithme du pivot de Gauss)**.**
Soit (S) un système linéaire à n équations à p inconnues. Alors il existe (T), un système échelonné à n équations à p inconnues tel que (S) et (T) soient équivalents.

Le principe de l'algorithme du pivot de Gauss est simple : à partir du système (S), on souhaite obtenir un nouveau système (T) échelonné de n équations à p inconnues en utilisant uniquement les opérations élémentaires sur les lignes. Ainsi, (T) et (S) auront les mêmes solutions et (T) se résout aisément. Voici comment l'algorithme procède :

1. Pour l'étape 1, on choisit le premier *pivot*, c'est-à-dire un coefficient associé à la première variable x_1 qui soit non nul.
   a) Premier cas $a_{1,1} \neq 0$. On choisit alors $a_{1,1}$
   b) Second cas $a_{1,1} = 0$. Alors, on cherche un $a_{j,1}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ tel que $a_{j,1}$ soit non nul. Une fois ce j trouvé, on effectue l'opération $L_1 \leftrightarrow L_j$. Le nouveau système ainsi obtenu vérifie que $a_{1,1} \neq 0$. **Remarque :** S'il s'avère qu'aucun des $a_{j,1}$ n'est non nul, alors la variable x_1 n'est pas une variable *pertinente*. (S) n'a en fait que $p-1$ inconnues.

2. On ramène le pivot à 1 pour simplifier : $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{1,1}} L_1$. **Remarque :** Il est impératif à cette étape d'avoir vérifié que $a_{1,1} \neq 0$.

3. Ensuite, on cherche à neutraliser le coefficient de x_1 à toutes les autres équations en effectuant successivement : pour tout j allant de 2 à n, $L_j \leftarrow L_j - a_{j,1} L_1$.

A la fin de ces trois étapes, on obtient le système suivant :

$$(S_0) : \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & \dfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_2 & + & \cdots & + & \dfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}} x_n & = & \dfrac{b_1}{a_{1,1}} & & (L_1) \\ 0 & + & \left(a_{2,2} - \dfrac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}\right) x_2 & + & \cdots & + & \left(a_{2,n} - \dfrac{a_{2,1}a_{1,n}}{a_{1,1}}\right) x_n & = & b_2 - \dfrac{a_{2,1}b_1}{a_{1,1}} & & (L_2) \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & + & \left(a_{m,2} - \dfrac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}\right) x_2 & + & \cdots & + & \left(a_{m,n} - \dfrac{a_{2,1}a_{1,n}}{a_{1,1}}\right) x_n & = & b_m - \dfrac{a_{m,1}b_1}{a_{1,1}} & & (L_m) \end{array} \right.$$

Soit

$$(S_0) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \quad (L_1) \\ 0 & + & a'_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \quad (L_2) \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & + & a'_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{m,n}x_n & = & b'_m \quad (L_m) \end{array} \right.$$

On extrait le sous-système

$$(S') : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \quad (L'_1) \\ & & \vdots & & & & \\ a'_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{m,n}x_n & = & b'_m \quad (L'_{m-1}) \end{array} \right.$$

et on recommence la procédure sur le sous-système (S'). Il est clair que la procédure s'arrête jusqu'à arriver dans l'une de ces situations :

- Soit, il n'y a plus de pivots non nuls disponibles, *i.e.* le nouveau sous système obtenu n'a que des coefficients nuls.
- Soit, il n'y a plus d'équations disponibles, *i.e.* le nouveau sous système obtenu est le système "vide".

On a alors un résultat important sur le pivot de Gauss.

Théorème 3.
Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues. Alors (S) est un système de Cramer si et seulement le pivot de Gauss effectué sur (S) engendre n pivots non nuls.

Preuve.
Si le système a n pivots non nuls, c'est que l'algorithme du pivot de Gauss s'arrête parce qu'il n'y a plus d'équations disponibles. On obtient alors un système échelonné dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Il est facile de voir que ce genre de système admet une unique solution.

Réciproquement, si le système a strictement moins de n pivots non nuls, alors c'est qu'on fait un apparaître un sous-système nul. On fait donc apparaître des équations du type "$0 = 0$" ou "$0 = 1$".

- Dans le premier cas, on a fait apparaître une équation inutile, ce qui nous permet de dire que (S) est équivalent à un système linéaire ayant plus d'équations que d'inconnues. Le système a donc une infinité de solutions.
- Dans le second cas, on fait apparaître une impossibilité, le système n'a donc aucune solution.

Dans les deux, le système n'est pas de Cramer. □

Exemple 3

On considère le système suivant $(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & - & z & = & -4 \\ x & - & y & - & 3z & = & -4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right.$

1. Première étape : Le coefficient devant le x de la première équation est non nul. On peut donc le choisir comme premier pivot. On effectue ensuite $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1$ pour ramener le pivot à 1, puis on effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ pour se débarrasser des coefficient associés à x. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & - & z & = & -4 \\ x & - & y & - & 3z & = & -4 \\ 3x & + & 6y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right. \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & \frac{1}{2}z & = & -2 \\ x & - & y & - & 3z & = & -4 \\ 3x & + & 6y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & \frac{1}{2}z & = & -2 \\ & - & 3y & - & \frac{5}{2}z & = & -2 \\ & & & & \frac{7}{2}z & = & 7 \end{array} \right.$$

2. Deuxième étape : Le coefficient devant le y de la deuxième équation est non nul. On peut donc le choisir comme deuxième pivot et le ramener à 1 avec $L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{3}L_2$ puis on a terminé car le coefficient de y dans la dernière équation est déjà nul.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & \frac{1}{2}z & = & -2 \\ & - & 3y & - & \frac{5}{2}z & = & -2 \\ & & & & \frac{7}{2}z & = & 7 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & \frac{1}{2}z & = & -2 \\ & & y & + & \frac{5}{6}z & = & \frac{2}{3} \\ & & & & \frac{7}{2}z & = & 7 \end{array}\right.$$

3. Troisième étape : le dernier pivot est non nul, on le ramène à 1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & \frac{1}{2}z & = & -2 \\ & & y & + & \frac{5}{6}z & = & \frac{2}{3} \\ & & & & \frac{7}{2}z & = & 7 \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow \frac{2}{7}L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & \frac{1}{2}z & = & -2 \\ & & y & + & \frac{5}{6}z & = & \frac{2}{3} \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exemple 4

On considère le système suivant (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & -5 \end{array}\right.$

1. Première étape : Ici, le coefficient en x est nul pour la première équation, on effectue donc l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$. Le nouveau pivot ainsi obtenu est déjà à 1, on peut donc déjà effectuer $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & -5 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & -5 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right.$$

2. Deuxième étape : Le coefficient devant le y de la deuxième équation est déjà à 1. On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & - & 3y & - & 3z & = & -6 \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Troisième étape : On arrive ici à une pénurie de pivot, l'algorithme s'arrête donc là. Il n'y a eu que deux pivots non nuls : ce n'est pas un système de Cramer.

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & + & z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & -7 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ 5x & + & 3y & - & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 3
Déterminer l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 (*i.e.* $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$) tel que $P(0) = P'(0) = 1$ et $P(1) = P'(1) = 0$.