Suites et équivalents

I. Suites

I.1. Généralités

Définition
Une suite de nombre réels est une liste, éventuellement infinie, de réels $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ Elle se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Commentaire

Il existe différentes manières de définir une suite :
1. la définition explicite permettant le calcul de u_n en fonction de n ;
2. la définition par récurrence : relation de récurrence + premier(s) terme(s) ;
3. une définition implicite assurant l'existence de u_n sans qu'on sache forcément la calculer.

Exemples

1. Formule explicite : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n + 5n - 1$.

2. Formule récurrente :
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - \exp(u_n) + \pi. \end{cases}$$

3. Formule implicite : Soit f l'application définie par
$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \log\left(\sqrt{|x|}\right) \end{cases}$$
La suite (u_n) est la suite définie par la relation
$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(u_n) = n.$$

I.2. Sens de variation

Définition
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geqslant u_n$.
Elle est dite *décroissante* si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leqslant u_n$.
Elle est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Commentaire

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes. Par exemple $u_n = (-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

MÉTHODO

Pour déterminer si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on pourra utiliser les méthodes suivantes :

- Si on n'a aucune hypothèse sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors par définition
  - × la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
  - × la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- Si tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, alors
  - × la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
  - × la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Exercice 1

Quelle est la monotonie des suites (u_n), (v_n) et (w_n) suivantes ?

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n!}{2^n}$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{k}\right) - n\sqrt{n}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2i-1}{2i}$

On peut se référer à la partie **Sommation** pour des rappels sur les symboles $\sum$ et $\prod$.

I.3. Majoration, minoration

Définition (Majorant, minorant)

- Une suite (u_n) est dite *majorée* si elle admet un majorant :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$

- Une suite (u_n) est dite *minorée* si elle admet un minorant :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$

- Une suite à la fois majorée et minorée est dite *bornée* :

$$(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M,$$

  ou encore

$$(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$

Commentaire

On rencontrera parfois des suites qui majorent d'autres suites. Par exemple, si on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n \text{ et } v_n = n,$$

alors on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n$$

la suite (u_n) majore alors la suite (v_n)

La suite (v_n) n'est en aucun cas majorée

I.4. Convergence et divergence d'une suite réelle

Définition
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la suite (u_n) *converge vers* ℓ, ou tend vers ℓ, quand n tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon) .$$

Notation Lorsque la suite (u_n) converge vers ℓ, on note

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Commentaire

Voici une autre manière d'exprimer la convergence d'une suite :
Une suite (u_n) converge vers le réel ℓ ssi tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf éventuellement un nombre fini.
C'est en fait une traduction littérale de la définition avec des ε.

Proposition 1.
Toute suite convergente est bornée :

$$(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow (u_n) \text{ bornée } .$$

Preuve.
Soit (u_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, donc, soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.
On note

$$M = \max_{i \in [\![0,n_0]\!]} |u_i|.$$

M existe car $\operatorname{Card}([\![0,n_0]\!])$ est fini. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min(M, \ell - \varepsilon) \leqslant u_n \leqslant \max(M, \ell + \varepsilon),$$

i.e. la suite (u_n) est bornée. □

⚠ Ce résultat n'est pas une équivalence ! Une suite bornée n'est pas forcément convergente.
Par exemple, la suite $((-1)^n)$ est bornée mais pas convergente.

Proposition 2 (Unicité de la limite)**.**
Soit (u_n) *une suite réelle.*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \in \bar{\mathbb{R}} \\ u_n \to \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2.$$

Autrement dit, si une suite (u_n) *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R}$*, alors celle-ci est unique.*

Preuve.
On suppose sans perdre de généralité que $\ell_1 \leqslant \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geqslant n_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \quad ((u_n) \text{ converge vers } \ell_1), \tag{1}$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geqslant n_2, |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon \quad ((u_n) \text{ converge vers } \ell_2), \tag{2}$$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant n_0$. On est bien dans les cas où les inégalités (1) et (2) sont vérifiées. Donc :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$-\varepsilon \leqslant u_n - \ell_1 \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leqslant \ell_2 - u_n \leqslant \varepsilon.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient que $\forall \varepsilon > 0$, $-2\varepsilon \leqslant \ell_2 - \ell_1 \leqslant 2\varepsilon$, donc simplement $\ell_2 - \ell_1 \leqslant 2\varepsilon$. Comme ces inégalités sont valables pour tout ε, elles restent vraies pour $\varepsilon = (\ell_2 - \ell_1)/4$. On a alors

$$\ell_2 - \ell_1 \leqslant \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell_2 - \ell_1}{2} \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 \leqslant \ell_1.$$

Or on sait que $\ell_1 \leqslant \ell_2$. Donc $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition (Suite extraite)
Soit (u_n) une suite. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est appelée *sous- suite* ou *suite extraite* de (u_n).

Exemples
On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$.

- Si on note $v_n = u_{2n}$, alors (v_n) est une sous-suite de (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1$.
- Si on note $w_n = u_{2n+1}$, alors (w_n) est une sous-suite de (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1$.

Théorème 1.

- *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.*
- *Une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0.*
- *Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $(u_n - \ell)$ converge vers 0.*

Commentaire

Le point *1*. fournit des critères de divergence :

- si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge.
- si (u_n) admet deux sous-suites tendant vers deux limites distinctes, alors (u_n) diverge.

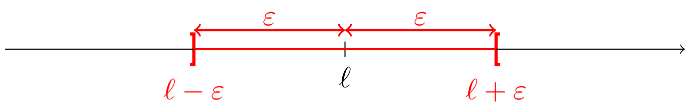
Exemple
La suite $((-1)^n)$ est divergente.

Proposition 3 (Propriété de recouvrement, Hors programme mais utile au concours).
Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. Si les sous- suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers un même réel ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Preuve.
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme $u_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (u_n)) sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.
- Comme $u_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indice impair de la suite (u_n)) sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux. Ainsi, la suite (u_n) converge vers ℓ.
On peut rédiger cette preuve « avec des ε » en s'appuyant sur la représentation graphique suivante :



$\square$

> Cette proposition étant hors programme, il faut la redémontrer à chaque utilisation.

Commentaire

La proposition précédente est toujours valable si on considère un nombre **fini** de sous-suites $(u_{\varphi_1(n)})$, $(u_{\varphi_2(n)})$, …, $(u_{\varphi_d(n)})$ lorsque $\varphi_1(n), \dots, \varphi_d(n)$ recouvrent $[\![0, n]\!]$.

Définition

- On dit qu'une suite *diverge* si elle n'est pas convergente
- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow u_n > A)\,.$$

- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \ \Rightarrow u_n < -A)\,.$$

Commentaire

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, diverge vers $+\infty$.

2. La suite (v_n) définie par $v_n = -5n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, diverge vers $-\infty$.

3. La suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, diverge (mais ne diverge pas vers $\pm\infty$). Elle n'admet pas de limite.
On notera que l'on se trouve dans ce dernier cas si la suite (u_n) admet deux suites extraites de limites différentes, comme c'est le cas ici.

Proposition 4.
Soit (u_n) une suite réelle.

1. $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$.

2. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.

3. Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (réciproquement $-\infty$), alors elle est positive (réciproquement négative) à partir d'un certain rang.

> La réciproque du point *2.* est fausse : la suite $((-1)^n n)$ n'est pas majorée et ne diverge pas vers $+\infty$.

I.5. Limite et ordre

Proposition 5 (Passage à la limite dans les inégalités).
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* (u_n) *une suite convergente de limite* $\ell \in \mathbb{R}$.

- *S'il existe un rang* n_0 *à partir duquel* $u_n \geqslant a$*, alors on a* $\ell \geqslant a$*, i.e.*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \to \ell \\ u_n \geqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geqslant a.$$

- *S'il existe un rang* n_0 *à partir duquel* $u_n \leqslant b$*, alors on a* $\ell \leqslant b$*, i.e.*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \to \ell \\ u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \leqslant b.$$

- *S'il existe un rang* n_0 *à partir duquel* $a \leqslant u_n \leqslant b$*, alors on a* $a \leqslant \ell \leqslant b$*, i.e.*

$$\left.\begin{array}{c} u_n \to \ell \\ a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow a \leqslant \ell \leqslant b.$$

Commentaire

- On peut écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes :

$$\left.\begin{array}{r} u_n \to \ell \\ u_n > a \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geqslant a \qquad \left.\begin{array}{r} u_n \to \ell \\ u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \leqslant b$$

$$\left.\begin{array}{c} u_n \to \ell \\ a < u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow a \leqslant \ell \leqslant b$$

- Par exemple, par passage à la limite, on a :

$$\frac{1}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \geqslant 0$$

Proposition 6 (Composition de limites).
Soit (u_n) *une suite réelle de limite* $a \in \mathbb{R}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction qui admet en* a *une limite* $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(f(u_n))$ *est convergente de limite* ℓ *:*

$$\left.\begin{array}{ccc} u_n & \to & a \\ f(x) & \underset{x \to a}{\to} & \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Théorème 2 (Théorème de comparaisons des limites).
Soit (u_n) *une suite convergeant vers un réel* ℓ_1.
Soit (v_n) *une suite convergent vers un réel* ℓ_2.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$*, alors :*

$$\ell_1 \leqslant \ell_2$$

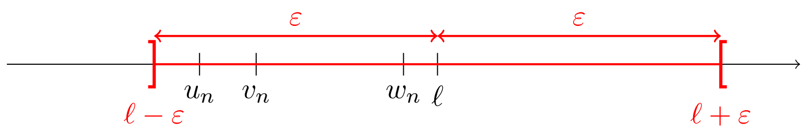
Commentaire

En particulier,
- si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
- si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Théorème 3 (Théorème d'encadrement)**.**
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :
× *(u_n) est convergente de limite ℓ.*
× *(w_n) est convergente de limite ℓ.*
× *il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*
Alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

Preuve.
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
- Tous les termes de (u_n) (sauf éventuellement un nombre fini) sont dans I.
- Tous les termes de (w_n) (sauf éventuellement un nombre fini) sont dans I.
- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

On en conclut que tous les termes de (v_n) sont dans I.
On peut rédiger cette preuve « avec des ε » en s'appuyant sur la représentation graphique suivante :



□

Théorème 4 (Théorème de la limite monotone)**.**
a) *Toute suite croissante majorée converge.*
b) *Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*
c) *Toute suite décroissante minorée converge.*
d) *Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Preuve.
La démonstration de l'énoncé ***a)*** est hors programme. Nous allons démontrer l'énoncer ***b)***. Les énoncés ***c)*** et ***d)*** s'obtiennent en appliquant les résultats ***a)*** et ***b)*** à la suite $(-u_n)$.
Soit (u_n) une suite réelle croissante et non majorée. Traduisons ces propositions avec des ε.
- (u_n) est croissante, c'est-à-dire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant u_{n+1}.$$
- (u_n) n'est pas majorée, c'est-à-dire `NON`$(\exists A > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant A)$. Donc
$$\forall A > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ u_N > A.$$
- Traduisons maintenant ce que l'on veut obtenir : (u_n) diverge vers $+\infty$:
$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \ u_n > A.$$
On peut remarquer qu'on y est déjà presque avec la définition de « non majorée ».

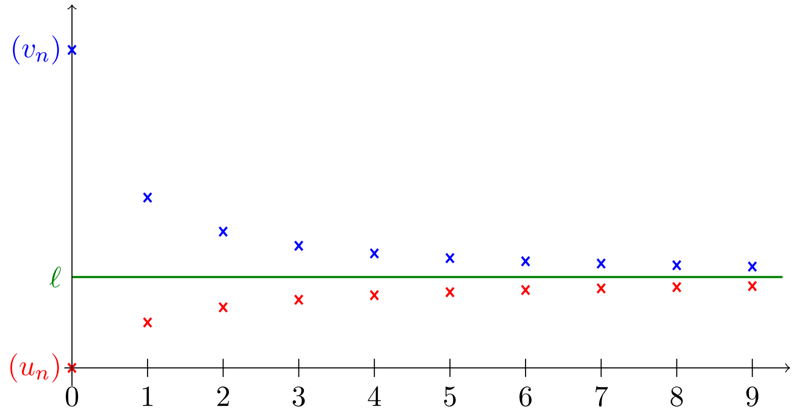
On sait donc que pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Or la suite (u_n) est croissante. Donc par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$, ce qu'il fallait démontrer. □

Les réciproques sont fausses ! Par exemple, la suite (u_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{(-1)^n}{n},$$
converge vers 0 mais n'est pas croissante.

Définition (Suites adjacentes)
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si

1. (u_n) est croissante ;
2. (v_n) est décroissante ;
3. $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Théorème 5 (Théorème des suites adjacentes)**.**
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes, de même limite.



Preuve.

- On va d'abord montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
  On étudie la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = v_n - u_n$.
  - × Montrons que (w_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (v_n) est une suite décroissante. Donc $v_{n+1} \leqslant v_n$, *i.e.* $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
    (u_n) est une suite croissante. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$, *i.e.* $u_n - u_{n+1} \leqslant 0$.

    $$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \leqslant 0$$

    Donc la suite (w_n) est décroissante.
  - × Montrons que (w_n) est minorée par 0.
    Comme les suites(u_n) et (v_n) sont adjacentes, la suite (w_n) est convergente. Donc elle est bornée.
    (w_n) est décroissante et minorée, donc, d'après le théorème de convergene monotone,

    $$\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \ w_n = 0$$

    Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$.

  Ce qui revient à dire que $u_n \leqslant v_n$.
- Montrons maintenant que (u_n) est majorée et (v_n) minorée.
  (v_n) est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0$ (récurrence immédiate). De plus $u_n \leqslant v_n$, donc $u_n \leqslant v_0$, *i.e.* (u_n) est majorée.
  On montre de même que (v_n) est minorée.

- Montrons enfin que (u_n) et (v_n) convergent et ont même limite.
  (u_n) est une suite croissante et majorée, donc elle converge vers un réel noté ℓ_1.
  (v_n) est une suite décroissante minorée, donc elle converge vers un réel noté ℓ_2.
  Il faut maintenant montrer que $\ell_1 = \ell_2$. Or

$$0 = \lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to \infty} v_n = \ell_1 - \ell_2.$$

⚠ La 2ème égalité est vraie car les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

On a donc bien $\ell_1 = \ell_2$. □

Exemples (Critère de convergence des séries alternées)
Soit (a_n) une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. On définit les suites suivantes

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \; v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$?

1. On commence par déterminer la monotonie de (u_n) et (v_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$ car (a_n) est décroissante. Donc (u_n) est une suite décroissante.
$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0$ car (a_n) est décroissante. Donc (v_n) est une suite croissante.

2. On montre ensuite que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Avec *1.*, il suffit de montrer que $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n - u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = -a_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. On montre la convergence de (u_n) et (v_n).
D'après le théorème des suites adjacentes, (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite ℓ.

4. On en déduit la convergence de (w_n).
Les suites (u_n) et (v_n) sont deux sous-suites de (w_n). Plus précisément $u_n = w_{2n}$ et $v_n = w_{2n+1}$. On sait par une proposition hors programme que si (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent vers un même réel ℓ, alors (w_n) converge vers ℓ. Comme ce résultat est hors programme, nous allons le redémontrer. Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

× Comme $w_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (w_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (w_n)) sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.

× Comme $w_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (w_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (w_n)) sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (w_n) sauf un nombre fini d'entre eux. Ainsi, la suite (w_n) converge vers ℓ. Autrement dit la série $\sum (-1)^k a_k$ est convergente.

I.6. Limites et opérations

Somme $u_n + v_n$

v_n \ u_n	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Produit $u_n \times v_n$

v_n \ u_n	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$

v_n \ u_n		$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$		$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$		$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	$v_n>0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
	$v_n<0$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.

Commentaire

On notera que l'ensemble des suites convergentes, c'est–à-dire l'ensemble $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists \ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\}$, est un espace vectoriel.

Techniques pour lever une F.I.

Afin de lever un F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

a) Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui ayant la plus forte croissance).
Autrement dit, trouver un équivalent simple de la suite.

b) Penser à la quantité conjuguée.

c) Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.

d) Penser aux croissances comparées.

e) Utilisation du taux d'accroissement.

f) Utilisation d'inégalités. Le théorème d'encadrement est souvent utilisé pour déterminer un équivalent ou pour montrer qu'une suite tend vers 0.

II. Suites récurrentes

On s'intéresse dans ce chapitre à des suites définies de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.
On étudie une telle suite de la manière détaillée ci-dessous.

II.1. Présence d'un intervalle stable

Définition
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
L'intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.
Autrement dit si : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \ \Rightarrow\ f(x) \in I$.

L'utilité est la suivante.

$$\left.\begin{array}{l} u_0 \in [a,b] \\ f([a,b]) \subset [a,b] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,b]$$

Commentaire

- Cette propriété se montre par récurrence, type de raisonnement adapté puisque la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence.
- Cette propriété peut parfois servir à démontrer que la suite (u_n) est bien définie (obligatoire lorsque f n'est pas définie partout). On écrira alors :
  « Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ existe} \\ \text{et } u_n \in [a,b] \end{array}\right.$ »
- On tire d'une telle propriété que (u_n) est bornée ce qui peut permettre, plus tard, de démontrer qu'elle est convergente.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$

Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

Preuve.

La fonction f définie par $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Démontrons alors par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in \mathbb{R}_+,\ i.e.\ u_n \geqslant 0 \end{cases}$

- **Initialisation** :
  On sait : $u_0 \geqslant 0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $\begin{cases} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$)
  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$.
  Or f est définie sur $]-1,+\infty[$ et $[0,+\infty[\subset]-1,+\infty[$, donc $f(u_n)$ est bien défini, $i.e.$ u_{n+1} est bien défini.
  De plus, on a les implications suivantes :
  $$\begin{aligned} u_n \geqslant 0 \ &\Rightarrow\ 1+u_n \geqslant 1 \\ &\Rightarrow\ \ln(1+u_n) \geqslant \ln(1) = 0 \quad \textit{(car la fonction } \ln \textit{ est croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Rightarrow\ u_{n+1} \geqslant 0 \end{aligned}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. □

II.2. Monotonie et convergence de (u_n)

II.2.a) Si on connaît la monotonie de f

Si f est croissante sur I

Proposition 7.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \geqslant u_0 \\ f \textit{ croissante sur } I \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (u_n) \textit{ est croissante}$$

Preuve.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  Par hypothèse : $u_1 \geqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$).
  Par hypothèse de récurrence :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} \geqslant u_n \ &\Rightarrow\ f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \quad \textit{(car } f \textit{ est croissante sur } I\textit{)} \\ &\Rightarrow\ u_{n+2} \geqslant u_{n+1} \quad \textit{(par définition de la suite } (u_n)\textit{)} \end{aligned}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, $i.e.$ (u_n) est croissante. □

On prouve de la même manière la proposition suivante :

Proposition 8.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \leqslant u_0 \\ f \textit{ croissante sur } I \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (u_n) \textit{ est décroissante}$$

⚠ On ne confondra pas le sens de variation de la suite (u_n) avec le sens de variation de la fonction f qui sert à la définir.

⚠ Ces résultats sont « à la marge » du cours ; il faut les redémontrer chaque fois qu'on les utilise.

Commentaire

Pour la convergence, si la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante), 2 cas se présentent alors :

- si (u_n) est de plus majorée (resp. minorée), alors elle converge d'après le theorème de convergence monotone. C'est par exemple le cas quand $I = [a, b]$ ou $I =]-\infty, b]$.
- si (u_n) n'est pas majorée (resp. minorée), alors elle diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). On peut par exemple montrer que (u_n) n'est pas majorée en raisonnant par l'absurde.

Si f est décroissante sur I

Commentaire

Intuition : Si $u_0 \leqslant u_1$ et f est décroissante sur I.

$$\begin{array}{rcll} u_0 & \leqslant & u_1 & \\ & \Downarrow & & \textit{(car } f \textit{ est décroissante sur } I\textit{)} \\ u_1 = f(u_0) & \geqslant & f(u_1) = u_2 & \\ & \Downarrow & & \textit{(car } f \textit{ est décroissante sur } I\textit{)} \\ u_2 & \leqslant & u_3 & \\ & \Downarrow & & \textit{(car } f \textit{ est décroissante sur } I\textit{)} \\ u_3 & \geqslant & u_4 & \\ & \vdots & & \end{array}$$

Donc (u_n) n'est pas monotone.

Proposition 9.
Si f décroît sur I, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Preuve.
Par récurrence, comme les propriétés pour f croissante sur I. □

⚠ On ne confondra pas le sens de variation de la suite (u_n) avec le sens de variation de la fonction f qui sert à la définir.

⚠ Ces résultats sont « à la marge » du cours ; il faut les redémontrer chaque fois qu'on les utilise.

Commentaire

Pour la convergence de (u_n), on sait que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

1. Si on sait : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$
On utilise la propriété de recouvrement (à démontrer à chaque utilisation) et on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2. Si on sait : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$
La suite (u_n) possède alors 2 suites extraites qui convergent vers 2 limites **distinctes**, donc (u_n) n'est pas convergente.

3. Si on sait : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} - u_{2n+1} = 0$
Alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
Par théorème des suites adjacentes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ et on se retrouve dans le cas *1.*.

II.2.b) Si on connaît une propriété de f

Si on sait : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$

Proposition 10.

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x \quad \Rightarrow \quad (u_n) \textit{ est croissante}$$

où I **est un intervalle stable par** f.

Commentaire

- La démonstration est directe (ne demande pas de raisonner par récurrence). Soit $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant x par u_n (valide car $u_n \in I$), on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & \geqslant & u_n \\ \shortparallel & & \\ u_{n+1} & & \end{array}$$

- Évidemment : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x \ \Rightarrow\ (u_n)$ est décroissante.

Si on sait : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x$

Proposition 11.

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x \quad \Rightarrow \quad (u_n) \textit{ est décroissante}$$

où I **est un intervalle stable par** f.

Commentaire

Pour la convergence de (u_n) on peut utiliser les mêmes méthodes que dans le cas où f est croissante (théorème de convergence monotone, raisonnement par l'absurde par exemple)

Exemple
Reprenons l'Exercice 2.
Par concavité de la fonction ln, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$$

Et donc on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leqslant (x+1) - 1 = x$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$, donc $\ln(1+u_n) \leqslant u_n$, *i.e.* $u_{n+1} \leqslant u_n$.
D'où (u_n) est décroissante.
La suite (u_n) est :

- × décroissante
- × minorée par 0 ($\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$)

donc elle converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell \geqslant 0$.

II.3. Limite de (u_n) : points fixes de f

Théorème 6. *(Théorème de composition des limites)*
Soit (u_n) une suite réelle de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors la suite $(f(u_n))$ admet la limite ℓ.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to a \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

L'utilité est la suivante.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \\ f \text{ continue en } \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = f(\ell)$$

(où I est un intervalle stable par f)

Définition
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le réel $x \in \mathbb{R}$ est un **point fixe de** f si $f(x) = x$.

Commentaire

- La propriété précédente affirme donc que si (u_n) admet une limite, cette limite est un point fixe de f.
- La fonction f peut admettre plusieurs points fixes. Ceux qui ne sont pas dans I ne sont pas candidats à être la limite ℓ de (u_n) ($\ell \in I$ est simple à démontrer).

⚠ Même si f est continue sur I, le fait d'obtenir une (ou trente-six !) solutions dans I à l'équation $f(x) = x$ ne signifie pas pour autant que (u_n) converge : on peut juste affirmer qu'en cas de convergence, la limite est l'une des valeurs obtenues.

Commentaire

Si f est continue sur I et f n'a pas de point fixe, alors la suite diverge.

Exemple
Reprenons l'Exercice 2.
Comme $f(x) = x$ ssi $f(x) - x = 0$, pour déterminer les points fixes de $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on cherche les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} + x)}{1+x} = -\frac{x}{1+x} < 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
g	0 ↘	$-\infty$

La fonction g est :

× continue sur $[0, +\infty[$

× strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

Ainsi, g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $g([0, +\infty[)$, avec :

$$g([0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} g(x), g(0) \right] =]-\infty, 0]$$

Or $0 \in]-\infty, 0]$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.
Comme de plus $\ln(1+0) - 0 = 0$, on sait que cette unique solution est 0.
Donc l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$ est 0.
On sait déjà que (u_n) est une suite convergente. Ainsi, (u_n) converge vers 0.

II.4. Vitesse de convergence de (u_n) : Inégalité des accroissements finis

Théorème 7.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle.

$$\left.\begin{array}{l} \times\ f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \times\ \text{il existe } M \geqslant 0, \\ \quad \forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall (x,y) \in I^2, \\ |f(y) - f(x)| \leqslant M\, |y - x| \end{array}$$

Commentaire

Interprétation physique
L'IAF stipule alors que la vitesse moyenne entre deux instants a et b est comprise entre la plus petite vitesse instantanée et la plus grande vitesse instantanée.

L'utilité est la suivante.
(I désigne un intervalle stable par f et ℓ un point fixe de f)

1. Alors comme précédemment, on en tire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in I$.
2. En appliquant l'inégalité à $x = u_n$ et $y = \ell$, on obtient :

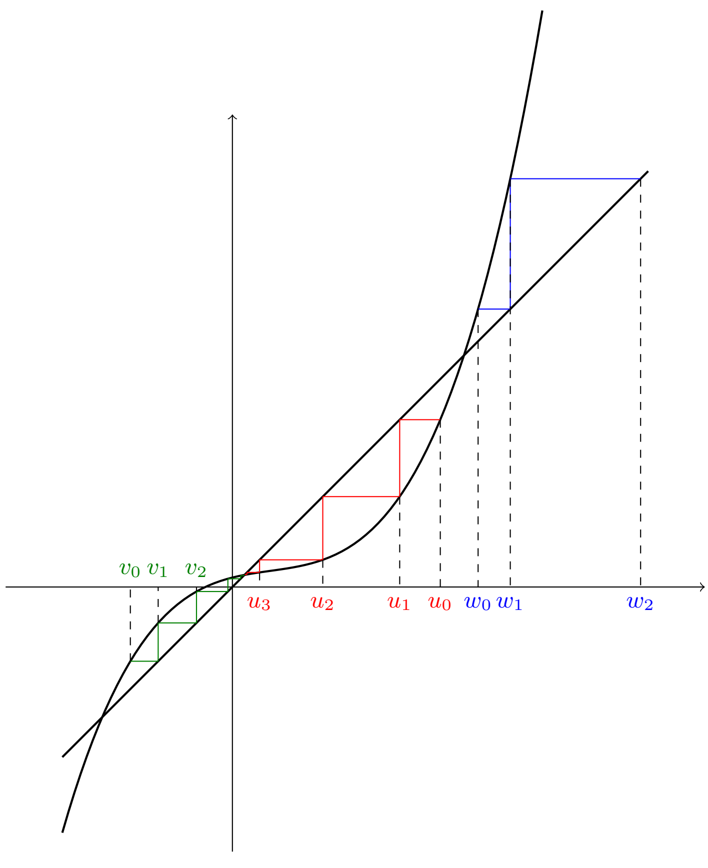
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \ \leqslant\ M\ |u_n - \ell|$$

3. D'où (par récurrence immédiate) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \ \leqslant\ M^n\ |u_0 - \ell|$
4. Si on sait de plus que $0 \leqslant M < 1$, alors (u_n) est convergente, de limite ℓ (par théorème d'encadrement).

Commentaire

Ce type d'énoncé est particulièrement adapté à des questions **Scilab**. Plus précisément, à une question du type :
« Écrire un programme permettant de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près »

II.5. Représentation graphique



Commentaire

Les propriétés évoquées précédemment se lisent sur ce graphique.

- Les points fixes de f se situent à l'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$. La limite (éventuelle) de (u_n) est l'un de ces points fixes.

  Il y en a ici 3 que nous notons (dans l'ordre croissant) ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3.
- Les intervalles $]-\infty, \ell_1]$, $[\ell_1, \ell_2]$, $[\ell_2, \ell_3]$, $[\ell_3, +\infty[$ sont des intervalles de stabilité par f. Ainsi, si u_0 est dans l'un de ces intervalles, tous les éléments de la suite (u_n) seront dans cet intervalle.
- Si l'on choisit $v_0 \in I = [\ell_1, \ell_2]$, la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} v_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \end{array}\right.$ est croissante.
  En effet : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$ (la courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$).
  La suite (v_n) est convergente (car majorée) de limite ℓ_2.
- Si l'on choisit $u_0 \in J = [\ell_2, \ell_3]$, la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ est décroissante. En effet : $\forall x \in J,\ f(x) \leqslant x$ (la courbe représentative de f est située au-dessous de la droite d'équation $y = x$).
  La suite (u_n) est convergente (car minorée) de limite ℓ_2.
- Si l'on choisit $w_0 \in K =]\ell_3, +\infty[$, la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} w_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = f(w_n) \end{array}\right.$ est croissante. Démontrons qu'elle est non majorée.
  Supposons par l'absurde qu'elle est majorée.
  Elle est alors convergente et sa limite ℓ est un point fixe de f.
  Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geqslant w_0$ (par croissance de (w_n)).
  D'où, par passage à la limite : $\ell \geqslant w_0 > \ell_3$. C'est impossible : ℓ ne peut être strictement plus grand que le plus grand point fixe de f.
  Ainsi (w_n) et divergente vers $+\infty$.

II.6. Exemple d'étude d'une suite récurrente

On note (u_n) la suite réelle définie par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4u_n+5}{u_n+3}. \end{array}\right.$$

Étudier la suite (u_n).

1. a) Étude de $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4x+5}{x+3} \end{array}\right.$ pour déterminer un intervalle stable I contenant u_0.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Elle est de plus dérivable sur $]-\infty, -3[$ d'une part et $]-3, +\infty[$ d'autre part.
Calculons sa dérivée. Soit $x \in]-3, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{4 \times (x+3) - (4x+5) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0.$$

On obtient le même résultat sur $]-\infty, -3[$. Donc la fonction f est strictement croissante.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
f	4	↗ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ ↗	4

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$.
On note $I = [0, 4]$.
La fonction f est :

× continue sur I

× strictement croissante sur I

Ainsi, f réalise une bijection de I dans $f(I)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(I) & = & f([0,4]) \\ & = & [f(0), f(4)] \quad \textit{(car } f \textit{ est croissante)} \\ & = & \left[\dfrac{5}{3}, \dfrac{21}{7}\right] \\ & \subset & [0,4] = I \end{array}$$

On remarque alors que $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$, donc I est un intervalle stable de f contenant u_0.

b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in I \end{array} \right.$

- **Initialisation** : On a : $u_0 = 4$. Donc u_0 est bien défini et $u_0 \in [0, 4] = I$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in I \end{array} \right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in I$.
  Or f est bien définie sur I, donc $f(u_n)$ est bien défini, *i.e.* u_{n+1} est bien défini.
  De plus, comme f est croissante sur I,

  $$\begin{array}{rcl} 0 \leqslant u_n \leqslant 4 & \Rightarrow & f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4) \\ & \Rightarrow & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \qquad \textit{(car } 0 \leqslant \dfrac{5}{3} \textit{ et } \dfrac{21}{7} \leqslant 4\textit{)} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

2. ***a)*** On détermine la monotonie de (u_n).
On utilise ici le fait que f est croissante sur I.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  Tout d'abord : $u_0 = 4$. Ensuite : $u_1 = \dfrac{21}{7}$. Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} \leqslant u_n \quad & \Rightarrow \quad f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \quad \textit{(car } f \textit{ est croissante)} \\ & \Rightarrow \quad u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, *i.e.* (u_n) est décroissante.

b) On démontre la convergence de (u_n).
Comme (u_n) est décroissante, on cherche un minorant de (u_n).
Cette étape est très simple. En effet, on a déjà montré en *2*. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
Donc 0 est un minorant de (u_n).
La suite (u_n) est :

× décroissante,

× minorée par 0.

Elle converge donc vers un réel ℓ vérifiant, par passage à la limite $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

3. Déterminer la limite ℓ.

a) On détermine les points fixes de f.
$$\begin{aligned} \frac{4x+5}{x+3} = x \quad & \Leftrightarrow \quad 4x+5 = x(x+3) = x^2+3x \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 5 = 0. \end{aligned}$$
Le discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 21$.
Donc les racines de cette équation sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.
On en déduit que les points fixes de f sont x_1 et x_2.

b) On élimine les « mauvais » candidats.
On sait déjà : $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.
Or $x_1 \in [0, 4]$ et $x_2 < 0$. Donc $\ell = x_1$.

III. Négligeabilité

III.1. Définitions

Définition (Négligeabilité)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels ; on suppose qu'à partir d'un certain rang aucun terme de (v_n) n'est nul. On dit que u_n est *négligeable devant* v_n quand n tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Exemples

1. n est négligeable devant n^2 quand n tend vers $+\infty$.

2. $\dfrac{1}{n^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

III.2. Notations de Landau

On désigne par $\underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
On écrit :

$$u_n \in \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

Un abus d'écriture admis consiste à écrire :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \quad \text{ou même} \quad u_n = o(v_n)$$

(on prendra l'habitude de lire : « u_n est un petit o de v_n »).

Commentaire

1. La notation de Landau est très utile, mais dangereuse à cause du signe d'égalité : ainsi on a $n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^4)$ et $n^3 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^4)$; ceci n'entraîne pas, par soustraction $n^3 - n^2 = 0$!

2. En cas de problème, ne pas hésiter à revenir à la définition, qu'on peut exprimer sous la forme suivante, avec une « vraie » égalité :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff u_n = v_n \cdot \varepsilon_n \text{ , avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

Commentaire

- Contrairement aux fonctions, on ne peut comparer deux suites que pour n tendant vers $+\infty$.
- Une suite négligeable devant une suite constante tend vers 0 :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

III.3. Propriétés

Les théorèmes sur les limites permettent de montrer les résultats suivants :

Théorème 8 (Règles de calculs).

1. **Linéarité** *Si* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ *et* $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ *alors, pour tout* $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda u_n+\mu v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.
2. **Transitivité** *Si* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *et* $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ *alors* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.
3. *Si* $u_n = o(v_n)$ *alors* $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$ *pour toute suite* (w_n) *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.*
4. *Si* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *et* $u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v'_n)$ *alors* $u_n u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n v'_n)$.
5. *Si* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, *pour tout réel* λ *non nul :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\lambda v_n)$.

Exemples

1. $n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ et $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ donc $n^2 - n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$.
2. $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$ donc $\dfrac{\ln(n)}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
3. $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$ et $\mathrm{e}^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ donc $\mathrm{e}^{-n}\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n\sqrt{n})$.
4. $\dfrac{1}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\dfrac{1}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(-\dfrac{5}{3n^2}\right)$, donc $\dfrac{2}{7n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(-\dfrac{5}{3n^2}\right)$.

⚠ Ne pas inventer de règles ! Elles seraient presque sûrement fausses. En cas de doute, on reviendra **toujours** à la définition.

III.4. Négligeabilités classiques

Les résultats qui suivent font partie du cours et n'ont pas à être redémontrés à chaque utilisation ; il est cependant conseillé de savoir les retrouver à partir des limites apprises en Terminale.

- Si α et β sont des réels vérifiant $\alpha < \beta$ (α et β éventuellement négatifs) alors :

$$n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta)$$

- Si α est un réel **strictement positif**, alors :

$$\mathrm{e}^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n^{-\alpha})$$

Proposition 12 (Croissances comparées).

- *Le logarithme est négligeable devant les puissances :* $\forall\alpha>0,\ \ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha)$.
- *Les puissances sont négligeables devant l'exponentielle :* $\forall\alpha>0,\ n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^n)$.
- *L'exponentielle est négligeable devant la factorielle :* $\mathrm{e}^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.

IV. Équivalence

IV.1. Définition et notation

Définition (Équivalence)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
On dit que u_n est *équivalent* à v_n quand n tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Exemples

1. $2n^2 - 3n + 5$ est équivalent à $2n^2$ quand n tend vers $+\infty$.

2. $\dfrac{1}{3n-2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{3n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Notation
Pour exprimer l'équivalence des suites (u_n) et (v_n), on écrit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{ou} \quad u_n \sim v_n.$$

Exemples

1. $\lfloor n \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n$; $n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$; $\sqrt{3n^2 - 7n + 12} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3}n$.

2. Si ℓ est un réel **non nul**, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Commentaire

1. Lorsque deux suites sont équivalentes, elles ne sont en général pas égales. L'oublier est une cause fréquente d'erreurs : ainsi, on a : $n^2 \sim n^2 - n$ et $1 - n^2 \sim -n^2$. Si on "ajoute membre à membre", on obtient : $1 \sim -n$, ce qui est manifestement faux !

2. En cas de problème, ne pas hésiter à revenir à la définition, qu'on peut exprimer sous la forme suivante, avec une vraie égalité :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n(1 + \varepsilon_n) \text{ , avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ n'a aucun sens ! Dans la pratique, on retiendra que, toutes les fois où on arrive à cette écriture, on s'est sûrement trompé.

IV.2. Propriétés générales

Théorème 9.

Soient (u_n), (v_n), (w_n) des suites réelles.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)
La relation d'équivalence $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

1) Réflexivité :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad\Rightarrow\quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$. □

Commentaire

La relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation binaire réflexive, symétrique, transitive.
Les relations vérifiant ce type de propriétés sont appelées des **relations d'équivalence**.
Nous avons déjà rencontré ce type de relations binaires : $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.
(les prochains chapitres fourniront d'autres exemples)

IV.3. Équivalents et limites

Théorème 10.

Soient (u_n), (v_n) des suites réelles.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)
La relation d'équivalence $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

1) Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \to \ell\ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \to \ell}$$

2) Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$$

(avec ℓ limite finie)

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \in \mathbb{R} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

(avec ℓ limite finie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$. □

Commentaire

- L'hypothèse $\ell \neq 0$ est primordiale pour les propriétés du point *2*.
  Par exemple :
  $$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{mais} \quad \cancel{\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$$

- Au passage, précisons que l'on ne doit `JAMAIS` écrire : $\cancel{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0}$.
  - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
  - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que u_n est nulle à partir d'un certain rang.

- Comme on l'a vu précédemment, la recherche d'équivalents (ou de termes dominants) ne se fait que lorque l'on considère une `SOMME` de termes. Cependant, on peut parfois aussi simplifier les produits lorsque l'un des termes admet une limite finie **non nulle** au voisinage du point considéré.
  Par exemple :
  - × $e^{1+\frac{1}{n}} \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^1 \times \ln(n)$.
  - × $\dfrac{\ln(n)}{2\,e^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{2\,e^0} = \dfrac{1}{2} \ln(n)$.
  - × $\dfrac{e^n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{\sqrt{1}} = e^n$.

  (on se sert ici de la compatibilité de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ avec le produit : cf théorème suivant)

IV.4. Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élévation à la puissance α

Théorème 11.

Soient (u_n), (v_n), (w_n), (z_n) des suites réelles.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

1) *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times z_n}$$

2) *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \dfrac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{z_n}}$$

3) *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \big(u_n\big)^m \underset{n\to+\infty}{\sim} \big(v_n\big)^m}$$

4) *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \textit{ strictement positive à} \\ \textit{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \big(u_n\big)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \big(v_n\big)^\alpha}$$

5) *Compatibilité avec la valeur absolue :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \big|u_n\big| \underset{n\to+\infty}{\sim} \big|v_n\big|}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire :

$$\frac{u_n \times w_n}{v_n \times z_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$$

2) Il suffit d'écrire :

$$\frac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{z_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$$

3) Deux cas se présentent.

× si $m = 0$: $\big(u_n\big)^0 = 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 = \big(v_n\big)^0$.

× si $m > 0$: alors, par compatibilité avec le produit :

$$\big(u_n\big)^m = u_n \times \ldots \times u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times \ldots \times v_n = \big(v_n\big)^m$$

4) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, (u_n) et (v_n) ont même signe (strictement positif) à partir d'un certain rang. D'autre part, pour tout n suffisamment grand :

$$\frac{(u_n)^\alpha}{(v_n)^\alpha} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\alpha \times 0) = \mathrm{e}^0 = 1$$

5) Il suffit d'écrire :

$$\frac{|u_n|}{|v_n|} = \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |1| = 1$$

□

Commentaire

Le théorème précédent établit que l'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient.
Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.
1) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n + \sqrt{n} \\ v_n = n + \ln(n) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad w_n = -n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n = z_n$$

mais $\sqrt{n} \;=\; \cancel{u_n + w_n \sim v_n + z_n} \;=\; \ln(n)$.

$\boxed{\text{On ne peut sommer des équivalents !}}$

2) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n + 1 \\ v_n = n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

mais $\mathrm{e}^{n+1} \;=\; \cancel{\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}} \;=\; \mathrm{e}^n$ puisque $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e} \;\cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}}\; 1$

De manière générale, on ne peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} \to 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{u_n - v_n} \to 1 \;\Leftrightarrow\; u_n - v_n \to 0}$$

Exercice 3

1) Limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \dfrac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$?

- $3n+4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ car $\dfrac{3n+4}{3n} = 1 + \dfrac{4}{3n} \to 1$
  Ainsi : $(3n+4)^3 = (3n+4)(3n+4)(3n+4) \underset{n\to+\infty}{\sim} (3n)(3n)(3n) = 3^3 n^3$.

- $8n^{-2} + 2n^{-4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^{-2}$ car $\dfrac{8n^{-2}+2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{4n^2} \to 1$

On en déduit : $(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^3 n^3 \times 8n^{-2} = 3^3\ 8n$

- $9n + 10 \underset{n\to+\infty}{\sim} 9n$ car $\dfrac{9n+10}{9n} = 1 + \dfrac{10}{9n} \to 1$

  On en déduit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{\cancel{3}}\, 8\cancel{n}}{\cancel{9}\cancel{n}} = 3 \times 8 = 24$.

  Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 24$.

2) Limite de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$?

3) Limite de la suite (w_n) de terme général : $w_n = \sqrt{n^2+2} - n$?

Propriété

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).
Soit (v_n) une suite réelle.
Supposons que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Alors : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer :

$$\frac{u_n+v_n}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

□

Exercice 4

Limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \dfrac{n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n}}{n^3\,(\ln(n)) + n\,(\ln(n))^3}$?

- $n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\mathrm{e}^{2n}$. En effet :

  $n^2\,\mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n\,\mathrm{e}^{2n})$ puisque $\dfrac{n^2\,\mathrm{e}^n}{n\,\mathrm{e}^{2n}} = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- $n^3\,(\ln(n)) + n\,(\ln(n))^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3\,(\ln(n))$. En effet :

  $n\,(\ln(n))^3 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3\,(\ln(n)))$ puisque $\dfrac{n\,(\ln(n))^3}{n^3\,(\ln(n))} = \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\,\mathrm{e}^{2n}}{n^3\,(\ln(n))} = \dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2\,(\ln(n))}$.

Or : $\dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2\,(\ln(n))} = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^2}\,\dfrac{\mathrm{e}^n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées.

D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

> Cette propriété n'autorise en aucun cas à sommer des équivalents.
> La sommation d'équivalents est, rappelons-le, interdite !

Commentaire

- Cette propriété signifie simplement que si (v_n) est négligeable devant (u_n), le terme dominant de $u_n + v_n$ n'est autre que u_n.
- Dans l'exercice précédent, on peut rédiger sans utiliser cette propriété.
  On a $n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\mathrm{e}^{2n}$ car :

$$\frac{n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n}}{n\,\mathrm{e}^{2n}} = \frac{n^2\,\mathrm{e}^n}{n\,\mathrm{e}^{2n}} + \frac{n\,\mathrm{e}^{2n}}{n\,\mathrm{e}^{2n}} = \frac{n}{\mathrm{e}^n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

IV.5. Équivalents usuels

Les résultats qui suivent font partie du cours et n'ont pas à être redémontrés à chaque utilisation. Ils découlent tous du théorème suivant.

Théorème 12.
Soit I un intervalle.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors, **par définition**, *on a :*

a) $$\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$$

b) $$\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$$ *(formulation équivalente)*

On a notamment :

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \quad \boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \quad \boxed{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1}$$

D'où, par le théorème de composition des limites :

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1} \quad \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1}$$

En particulier, on en tire :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}, \quad \ln\left(1 + e^{-n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$$

Et de manière plus générale :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n}$$

Corollaire 1.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n, \quad e^{u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n, \quad (1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha u_n$$

Commentaire

Les équivalents sont un outil en général efficace pour la recherche des limites de suites.

Théorème 13 (Équivalents et limites).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Pour que (u_n) admette une limite (finie ou infinie), il faut et il suffit que (v_n) en admette une, et dans ce cas elles sont égales :

- *Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) converge vers ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$.*

⚠ La réciproque est fausse ! Deux suites admettant la même limite ℓ ne sont pas forcément équivalentes en ce point ; plus précisément, elles le sont si ℓ est un réel non nul (par transitivité de l'équivalence), et ne le sont en général pas si $\ell = 0$ ou si $\ell = +\infty$ ou si $\ell = -\infty$.

⚠ Une erreur fréquente consiste, dans la recherche de la limite d'une expression, à remplacer une partie de l'expression par un équivalent ou par sa limite, ce qui est <u>interdit</u> : on doit toujours chercher un équivalent de l'expression entière en n'utilisant que les règles rappelées dans ce chapitre.

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

- Ce qu'il ne faut pas faire : écrire $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$ et en déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} 1^n = 1$$

- Ce qu'il faut faire : écrire $\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \dfrac{1}{n} = 1$ puis en déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

Commentaire

Pour éviter ce genre d'erreur, utiliser toujours le théorème ci- dessus : **<u>au lieu d'écrire</u>**

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 7}{n - 5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2}{n}$$

(même si c'est vrai !) **<u>écrire</u>** :

1. $\dfrac{2n^2 - 3n + 7}{n - 5} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2n^2}{n}$

2. puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2}{n} = +\infty$

<u>et conclure</u> : puisque deux suites équivalentes ont même limite, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 7}{n - 5} = +\infty$$

Théorème 14.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.
Alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.