Récurrence et sommation

I. Récurrence

I.1. Récurrence simple

Proposition 1 (Principe de récurrence simple)**.**
Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$.
Pour démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il suffit de démontrer que

- *$\mathcal{P}(0)$ est vraie.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*

En appliquant le principe de récurrence, il faut **impérativement** énoncer les quatre points suivants :

- *L'hypothèse de récurrence* : énoncer clairement $\mathcal{P}(n)$;
- *Initialisation* : vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- *Hérédité* : démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$. Pour cela, écrire une phrase du type « Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie » ;
- *Conclusion* : écrire « Le principe de récurrence nous assure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».

Exemple 1
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geqslant n$.

- *Énoncé de $\mathcal{P}(n)$* : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $2^n \geqslant n$.
- *Initialisation* : D'une part $2^1 = 2$, et d'autre part $2 \geqslant 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, *i.e.* $2^{n+1} \geqslant n+1$.
  On sait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Donc $2^n \geqslant n$.
  En multipliant par 2, on obtient $2^{n+1} \geqslant 2n$.
  Or, comme $n \geqslant 1$, $2n = n + n \geqslant n + 1$.
  Finalement $2^{n+1} \geqslant 2n \geqslant n + 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : Le principe de récurrence nous assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geqslant n$.

Exercice 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$.
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}.$$

Exercice 2
Trouver une formule simple pour la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^i$.

Pour les rappels sur le symbole $\sum$, voir la section suivante

I.2. Récurrence double

Proposition 2 (Principe de récurrence double).
On veut montrer l'assertion $\mathcal{P}(n)$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on procède de la manière suivante :

- Initialisation *: vérifier que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies ;*
- Hérédité *: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On montre alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.*

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

⚠ La clarté dans la rédaction est cruciale.

I.3. Récurrence forte

Proposition 3 (Principe de récurrence forte).
On veut montrer l'assertion $\mathcal{P}(n)$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$.
Pour cela, on procède de la manière suivante :

- Initialisation *: vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;*
- Hérédité *: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. On montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

⚠ La clarté dans la rédaction est cruciale.

II. Sommation

II.1. Utilisation des symboles $\sum$ et $\prod$

Notation Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p$. la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_p$ se note aussi

$$\sum_{k=1}^{p} u_k.$$

De même, le produit $u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_p$ se note aussi

$$\prod_{k=1}^{p} u_k.$$

Remarque Dans ces notations la lettre k peut être remplacée par n'importe quelle lettre. On dit que c'est une lettre *muette*. Par exemple

$$\sum_{k=1}^{p} u_k = \sum_{i=1}^{p} u_i = \sum_{n=1}^{p} u_n.$$

Proposition 4 (Propriétés du symbole $\sum$)**.**

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *deux suites réelles et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}(u_k+v_k) &= \sum_{k=1}^{p}u_k+\sum_{k=1}^{p}v_k,\\ \sum_{k=1}^{p}\lambda u_k &= \lambda\sum_{k=1}^{p}u_k,\\ \sum_{k=1}^{p}1 &= p.\end{aligned}$$

Proposition 5 (Propriétés du symbole $\prod$)**.**
Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *deux suites réelles et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{p}(u_k\times v_k) &= \prod_{k=1}^{p}u_k\times\prod_{k=1}^{p}v_k,\\ \prod_{k=1}^{p}\lambda u_k &= \lambda^p\prod_{k=1}^{p}u_k,\\ \prod_{k=1}^{p}1 &= 1.\end{aligned}$$

Remarque Il faut aussi savoir faire des changements d'indice. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{p}u_k=\sum_{k=0}^{p-1}u_{k+1}=\sum_{k=2}^{p+1}u_{k-1}.$$

Exercice 3

1. Vérifier que pour tout entier $i \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}.$$

2. En déduire une formule simple pour la somme suivante :

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i(i+1)}.$$

II.2. Quelques suites particulières

Suites arithmétiques

Définition (Suite arithmétique)
Une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
La constante r s'appelle la *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 6 (Terme général d'une suite arithmétique)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* r*. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = u_0 + nr$*.*

Proposition 7 (Somme à savoir calculer)**.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

- D'une part $\sum_{k=1}^{0} k=\sum_{k\in\varnothing} k=0$ par convention.

  D'autre part, $\frac{0(0+1)}{2}=0$.

  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, *i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) && \textit{(en mettant } (n+1) \textit{ en facteur)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

  c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence nous assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Corollaire 1 (Somme des termes d'une suite arithmétique)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique et* p *et* n *deux entiers. Alors, pour tout* $n \geqslant p$*,*

$$u_p+u_{p+1}1+u_{p+2}+\cdots+u_n=\sum_{k=p}^{n} u_k=(n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$$

Suites géométriques

Définition (Suite géométrique)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* s'il existe un réel q tel que $u_{n+1}=qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La constante q est appelée la *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 8 (Terme général d'une suite géométrique)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite géométrique de raison* q*. ALors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n=u_0q^n$*.*

Proposition 9 (Somme à savoir calculer).
Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve.
Posons $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Alors

$$q \times S = q \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k$$

Donc on obtient les égalités suivantes :

$$(1 - q)S = S - qS = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

Comme $q \neq 1$, on peut diviser par $(1 - q)$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 2 (Somme des termes d'une suite géométrique).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On suppose que $q \neq 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $n \geqslant p$,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p+1}^{n} u_k = u_p \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right).$$

II.3. Suites arithmético-géométriques

Définition (Suite arithmético-géométrique)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* s'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

`MÉTHODO`

Pour trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on procède de la manière suivante :

1. on cherche un réel l tel que $l = al + b$.

2. on vérifie que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l$ est géométrique.

3. on en déduit le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2

Déterminer le terme général de la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = 4u_n + 1. \end{cases}$.

1. On cherche un réel l tel que $l = 4l + 1$, c'est-à-dire $3l = -1$, ou encore $l = -1/3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = u_n + \frac{1}{3}.$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = (4u_n + 1) + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4v_n.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$v_n = v_0 4^n = \left(u_0 + \frac{1}{3} \right) 4^n = \frac{4^n}{3}.$$

3. On revient maintenant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

II.4. Suites à double récurrence linéaire

Définition (Suite à double récurrence linéaire)
On appelle suite à *double récurrence linéaire* toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont des constantes.
On appelle *équation caractéristique* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Remarque L'équation caractéristique d'une suite à double récurrence linéaire est une équation polynomiale de degré 2. On sait la résoudre en calculant son discriminant Δ.

Proposition 10 (Terme général d'une suite à double récurrence linéaire)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à double récurrence linéaire.

- *Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, c'est-à-dire si $\Delta > 0$, alors il existe deux réels e et f tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = er_1^n + fr_2^n.$$

- *SI l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une racine double r, c'est-à-dire si $\Delta = 0$, alors il existe deux réels e et f tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = er^n + fnr^n.$$

Dans les deux cas, on peut déterminer e et f avec u_0 et u_1.

Exemple 3
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}$$

Déterminons le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On resonnaît un suite à double récurrence linéaire.

1. On commence par étudier son équation caractéristique.
Son équation caractéristique est

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

La racine de cette équation est 3.

2. On en déduit la forme du terme général de (u_n).
D'après la proposition 10, il existe donc deux réels e et f tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = e3^n + fn3^n.$$

3. On reconnaît une suite à double récurrence linéaire. Il reste à déterminer e et f. Or on sait que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc

$$\begin{cases} e = 0 \\ e + 3f = 1 \end{cases}$$

Donc $e = 0$ et $f = \frac{1}{3}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}n3^n.$$

II.5. Trois sommes à savoir retrouver

Proposition 11.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Preuve.
Cette proposition se démontre par récurrence. Pour des rappels sur le principe de récurrence, voir la partie précédente. □

Proposition 12.
Soient $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2}.$$

Preuve.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que

$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

On dérive cette égalité et on obtient :

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Cette relation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, elle est donc en particulier vraie pour $x = q$, ce qui termine la preuve. □