Séries numériques

I. Séries numériques à termes réels

Définition (Série)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels quelconque. On appelle *série de terme générale* u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé *somme partielle* au rang n de la série.

Commentaire

On peut aussi définir une série en faisant commencer la somme à autre chose que 0, en particulier lorsque la suite (u_n) n'est pas définie.

$$(S_n)_{n\geqslant 1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geqslant 1} \ ; \ (B_n)_{n\geqslant 2} = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln(k^2-k)\right)_{n\geqslant 2}.$$

Commentaire

Toute série, d'après la définition, est « fabriquée » à partir d'une suite. Il peut être intéressant d'observer que, réciproquement, toute suite peut être considérée comme une série. En effet :

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k)$$

Définition
Soit (S_n) une série de terme général u_n. On dit que la série converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe.
On note la limite $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1 (HP)**.**
Soit $\sum u_n$ une série **convergente**.
On définit (R_n) la suite des restes de rang $(n+1)$ de cette série : $\forall n\in\mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Preuve.
Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors la suite (S_n) de ses sommes partielles converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On découpe la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= S_n + R_n\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. □

Théorème 1.
Pour qu'une série converge, il faut (mais cela ne suffit pas) que son terme général tende vers 0.

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Corollairement, toute série dont le terme général ne tend pas vers 0 *est divergente.*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}$$

La réciproque de cette proposition est fausse !

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Exemple

$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Théorème 2.
Deux séries qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes sont de même nature, i.e. sont simultanément convergentes, ou simultanément divergentes.

On définit la somme des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ comme étant la série de terme général $u_n + v_n$. De même, le produit par le réel λ de la série $\sum u_n$ est la série dont le terme général est égal à λu_n.

Proposition 2.
Soient (A_n) *et* (B_n) *deux séries convergentes de terme général respectif* a_n *et* b_n*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors, la série de terme général* $a_n + \lambda b_n$ *converge et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + \lambda b_k) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Commentaire

- Il faut s'assurer de la convergence de toutes les séries avant d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Plus généralement, lorsqu'on effectue des calculs sur des séries, il est plus prudent de travailler sur les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} u_n$ jusqu'à s'assurer de la convergence. On peut ensuite écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition
On appelle *série télescopique* (ou *somme télescopique*) toute série dont le terme général u_k peut s'écrire comme la différence de deux termes consécutifs d'une suite v_k.
Autrement dit, une série télescopique est une série dont le terme général est de la forme $u_k = v_{k+1} - v_k$.

Exemples
Certaines séries sont télescopiques de manière évidente comme par exemple :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Parfois, il faut réussir à faire apparaître le caractère télescopique d'une série. Les séries suivantes peuvent être mises sous la forme d'une série télescopique :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)_{n\geqslant 1},\ \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\right)_{n\geqslant 2}.$$

En effet, soit $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{-1}{k} - \frac{-1}{k-1}\right)\end{aligned}$$

Théorème 3 (Hors Programme)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Preuve.
Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k\\ &= \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \textit{(par décalage d'indice)}\\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j + u_{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_0\right)\\ &= u_{n+1} - u_0\end{aligned}$$

Donc (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge.
De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_0) = \ell - u_0.$$ □

Si la somme ne commence pas $k = 0$, on saura s'adapter.

Application

Calculons la limite de la série $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}\right)_{n\geqslant 2}$.

Soit $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

On a vu : $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= 1 + \cancel{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{j}} - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

II. Séries numériques usuelles

II.1. Série harmonique

Définition (Série harmonique)

On appelle *série harmonique* la série de terme général $\dfrac{1}{n}$. Sa somme partielle au rang n est donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Proposition 3.

La série harmonique diverge. Sa limite, lorsque n tend vers l'infini est $+\infty$.

Preuve.

Soit $k \geqslant 1$.

Tout d'abord, montrons :

$$\frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$$

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $[k, k+1]$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall x \in [k, k+1], \ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$), on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx$$

Comme $\dfrac{1}{k}$ et $\dfrac{1}{k+1}$ ne dépendent pas de la variable d'intégration x, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k}$$

On somme les encadrements ci-dessus entre 1 et n. Par relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} = \ln(n+1)$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

□

II.2. Série géométrique

Définition (Série géométrique)
On appelle *série géométrique* toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Exemples

$$\sum_{k=0}^{n} 3\times(-5)^k, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{3^k}.$$

Proposition 4.

$$\sum q^n \text{ converge} \Leftrightarrow |q| < 1$$

Si $|q|<1$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Preuve.
On rappelle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On en déduit que la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$.

De plus, si $|q|<1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}\lim_{n\to+\infty} \left(1-q^{n+1}\right).$$

Or, comme $|q|<1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. On conclut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

□

Application
Calculer la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3^k}\right)$.

Soit $n \geqslant 2$. On commence par factoriser par 2.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3^k} = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^k}$$

puis on souhaite que l'indice commence à 0 pour appliquer la formule précédente. On effectue donc le changement d'indice $j = k-2$.

$$2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^k} = 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^{j+2}} = 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^2}\frac{1}{3^j} = \frac{2}{9}\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^j}$$

enfin, on applique la formule.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{9}\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 5.

1. $\sum nq^{n-1}$ *converge* $\Leftrightarrow |q| < 1$.

Si $|q| < 1$, *alors* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

2. $\sum n(n-1)q^{n-2}$ *converge* $\Leftrightarrow |q| < 1$.

Si $|q| < 1$, *alors* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$.

Preuve.

1. Soit $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$. On sait :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f_n(x) \ = \ \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

On sait aussi que f_n est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ en tant que polynôme, et :

× d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f_n'(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} k\, x^{k-1},$$

× d'autre part, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, :

$$f_n'(x) \ = \ \frac{(1-x)(n+1)x^n + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} \ = \ \frac{1 + (n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\, q^{k-1} \ = \ f_n'(q) \ = \ \frac{1 + (n+1)q^n - nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Or, on sait par croissances comparées :

$$\lim_{n \to +\infty} n\, q^n \ = \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad q \in \,]-1, 1[$$

On en déduit que :

× la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\, q^{n-1}$ converge si et seulement si $q \in \,]-1, 1[$,

× dans ce cas (le cas $q \in \,]-1, 1[$) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k\, q^{k-1} \ &= \ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k\, q^{k-1} \\ &= \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + (n+1)q^n - nq^{n+1}}{(1-q)^2} \\ &= \ \frac{1 + 0 - 0}{(1-q)^2} \ = \ \frac{1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

2. De manière analogue, en dérivant une nouvelle fois la fonction f_n, on obtient :

× la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $q \in \,]-1, 1[$,

× $\forall q \in \,]-1, 1[,\ \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} \ = \ \dfrac{2}{(1-q)^3}$.

□

Commentaire

On retiendra que dans ce cas, on a le droit de dériver terme à terme la somme. Le calcul de ces sommes sert en particulier pour les probabilités discrètes.

Application

Soit $|q| < 1$. Établir la convergence de la série $\sum n^2 q^n$ et calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que pour tout $k \geqslant 0$, $k^2 = k + k(k-1)$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 q^k &= \sum_{k=0}^{n} (k + k(k-1))q^k \\ &= q \sum_{k=0}^{n} k\, q^{k-1} + q^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)q^{k-2}\end{aligned}$$

Or, $|q| < 1$, donc les séries géométriques dérivées $\sum n\, q^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ de raison q convergent et on obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k &= \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{2q^2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{q(1-q) + 2q^2}{(1-q)^3} \\ &= \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}\end{aligned}$$

II.3. Série exponentielle

Définition (Série exponentielle)

On appelle *série exponentielle* toute série dont le terme général est de la forme $\dfrac{x^n}{n!}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle, de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple En particulier,

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$$\mathrm{e}^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

II.4. Séries de Riemann

Définition

On appelle *série de Riemann* une série dont le terme général est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$, où α désigne un réel strictement positif.

Exemples

- La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (de somme $\dfrac{\pi^2}{6}$).

Théorème 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Preuve.

- Si $\alpha = 1$, il s'agit de la série harmonique et la preuve est déjà faite.
- Si $\alpha \neq 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [k, k+1]$.

  Alors, par stricte décroissante de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha},$$

  Donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,dx$$

  Comme k^α et $(k+1)^\alpha$ sont des constantes par rapport à la variable d'intégration x, on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'encadrement précédent de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

  c'est-à-dire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

  Or : $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$. Donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

× Si $\alpha > 1$, alors : $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ est donc majorée par $\dfrac{1}{\alpha - 1}$. Elle est de plus croissante car c'est une somme de termes positifs. Donc, par théorème de convergence monotone, elle converge.
D'où la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

× Si $\alpha < 1$, alors $\alpha - 1 < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

Donc, par théorème de comparaison, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge. □

III. Séries à termes positifs

Définition
La série $\sum u_n$ est dite à termes positifs lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Proposition 6.
Soit $\sum u_n$ une série. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées.

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0) \ \Leftrightarrow\ (S_n) \textit{ est croissante}$$

Preuve.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{n+1} - S_n \;=\; u_{n+1} \;\geqslant\; 0$$

On en déduit que la suite (S_n) est croissante.

($\Leftarrow$) Supposons que (S_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} \;=\; S_{n+1} - S_n \;\geqslant\; 0$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

□

Théorème 6 (Critère de convergence)**.**
Soit $\sum u_n$ une série **à termes positifs** *: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.*

1. *(S_n) majorée $\Rightarrow \sum u_n$ converge.*

2. *(S_n) non majorée $\Rightarrow \sum u_n$ diverge.*

Preuve.
Comme $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite (S_n) est croissante.

- Si elle est de plus majorée, alors elle converge (théorème de convergence monotone)
- Si elle n'est pas majorée, alors elle diverge (toujours théorème de convergence monotone)

□

Théorèmes de comparaison

Théorème 7.
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* **à termes positifs** *telles qu'il existe un entier* n_0 *à partir duquel on a :* $u_n \leqslant v_n$*. Alors :*

1. $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Si de plus, $n_0 = 0$*, on a :* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*

Preuve.
On se place dans la preuve dans le cas $n_0 = 0$ pour une lecture plus simple.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$. Donc :

- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = T_n$.
- (S_n) et (T_n) sont croissantes car $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors (T_n) est majorée., *i.e.* il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant M$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant T_n \leqslant M$$

D'où (S_n) est majorée par M. De plus (S_n) est croissante, donc elle converge, *i.e.* $\sum u_n$ converge.

2. Si $\sum u_n$ diverge, alors (S_n) est non majorée. Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant T_n$.
D'où $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

□

Exemple (Règle de D'Alembert)
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que la limite suivante existe :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in [0, +\infty].$$

Montrer que :

- Si $\ell < 1$, la série de terme général u_n converge.
- Si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$.

Preuve.

- Si $\ell < 1$. Alors il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell < q < 1$ et, comme (u_n) converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ \leqslant\ q.$$

Par récurrence, on a alors que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$0 \ \leqslant\ u_n \ \leqslant\ q^{n-n_0}\, u_{n_0}$$

On obtient alors :

× $\forall n \geqslant n_0$, $0 \ \leqslant\ u_n \ \leqslant\ q^{n-n_0}\, u_{n_0}$

× la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} q^{n-n_0}$ converge en tant que série géométrique de raison q avec $0 \leqslant q < 1$.

Par critère de comparaison de séries **à termes positifs**, la série $\sum u_n$ converge.

- Si $\ell > 1$. Alors il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > q > 1$ et, comme (u_n) converge vers ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ \geqslant \ q.$$
Par récurrence, on a alors que pour tout $n \geqslant n_1$:
$$u_n \ \geqslant \ q^{n-n_1} u_{n_1} \ \geqslant \ 0$$
On obtient alors :
  × $\forall n \geqslant n_1$, $0 \ \leqslant \ q^{n-n_1}\, u_{n_1} \ \leqslant \ u_n$
  × la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} q^{n-n_0}$ diverge en tant que série géométrique de raison q avec $q > 1$.

  Par critère de comparaison de séries **à termes positifs**, la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$. □

> **Commentaire**
> Si $\ell = 1$, la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Théorème 8.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 9.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$, alors :

- *si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi,*
- *si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi.*

> **Commentaire**
> **(Technique du $n^2 u_n$)**
> On utilise très souvent ce théorème de comparaison par négligeabilité avec la suite $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Il s'agit donc de montrer que $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\, u_n = 0$.
> Pour montrer que $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on montre donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\, u_n = 0$.

IV. Convergence absolue

Définition (Convergence absolue)
Soit $(S_n) = \sum u_n$ une série. On dit que la série est *absolument convergente* si :
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k| \text{ existe.}$$
Autrement dit, la série $\sum u_n$ est absolument convergente ssi la série $\sum |u_n|$ est convergente.

> **Commentaire**
> La notion de convergence absolue est très importante, notamment en probabilités pour l'existence d'espérances.

Théorème 10.
Toute série absolument convergente est convergente.

$$\sum u_n \text{ absolument convergente } \Rightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

Si on a effectivement convergence, alors :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

La réciproque est fausse ! Comme le montre ce contre-exemple.

Proposition 7.
La série $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ *converge mais ne converge pas absolument.*

Preuve.

- Convergence de la série : On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et on considère les suites $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$. Montrons que les suites u_n et v_n sont adjacentes.
  - × (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. En effet, soit $n \geqslant 1$:

    $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

    et :

    $$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$$

  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. En effet, soit $n \geqslant 1$:

    $$v_n - u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  On en déduit que les suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite ℓ.
  Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
  - ▷ $(S_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc l'intervalle I contient tous les termes de (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (S_n)) sauf éventuellement un nombre fini,
  - ▷ $(S_{2n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc l'intervalle I contient tous les termes de (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (S_n)) sauf éventuellement un nombre fini.

  Finalement I contient tous les termes de (S_n) (sauf éventuellement un nombre fini), donc (S_n) converge vers ℓ.

- La série ne converge pas absolument : La série de terme général $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ est la série harmonique. On a déjà vu qu'elle diverge.

□

V. Comparaison séries / intégrales

Dans cette section, on suppose que f est une fonction définie (au moins) sur $[0,+\infty[$; qu'en outre, f est **continue**, **positive** et **décroissante** sur cet intervalle.
On s'intéresse à la série de terme général $f(n)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme f est décroissante, on peut écrire l'encadrement :

$$\forall x \in [k, k+1],\ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant bien ordonnées ($k \leqslant k+1$) :

$$f(k+1) \ \leqslant\ \int_k^{k+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(k)$$

On somme l'encadrement précédent pour k variant de 0 à $n-1$. On obtient ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \ \leqslant\ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

et, si on note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$, cela s'écrit :

$$S_n - f(0) \ \leqslant\ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant\ S_{n-1}$$

En observant que les deux suites (S_n) et $\left(\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes (car f est positive), on peut affirmer grâce à la dernière égalité :

- si (S_n) converge vers ℓ, alors $\left(\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ, donc converge aussi ;
- si $\left(\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors (S_n) est majorée par $\ell' + f(0)$, donc converge aussi.
- Tout ceci se généralise sans peine lorsque f n'est définie que sur $[1,+\infty[$ ou $[2,+\infty[$... On peut ainsi énoncer le théorème suivant.

Théorème 11.
Soit f est une fonction définie sur $[a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}_+$, **continue***,* **positive** *et* **monotone** *sur cet intervalle.*
Alors $\sum f(n)$ est de même nature que la suite de terme général $\int_a^n f(t)\ dt$.

VI. Étude de séries : récapitulatif

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1. Étude de la suite (u_n)

a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente. *(une étude plus précise doit être réalisée)*

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

2. Si $\sum u_n$ est à termes positifs ($i.e.$ si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 0$)

On dispose des trois outils suivants.

a) Théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) Théorème d'équivalence des séries à termes positifs.

c) Théorème de négligeabilité des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence.

(on pensera notamment à des séries de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann)

N.B. : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum\ -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3. Si $\sum u_n$ « quelconque » ($\sum u_n$ à termes de signe non constant)

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du ***2)*** sont utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente ($i.e.$ $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente *(une étude plus précise doit être réalisée).*

b) On revient à la définition : la série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) est convergente.

- On peut calculer S_n :
  - × en reconnaissant des séries usuelles (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées premières / deuxième, la série exponentielle).
  - × en reconnaissant une somme télescopique.
- On peut estimer S_n à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

Évidemment, les techniques du ***3.b)*** restent utilisables pour une série à termes positifs.