Réduction

Étant donnés un ev E de dimension finie et un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, on cherche à construire une base de E dans laquelle la matrice de f est « simple » (dans l'idéal, sous forme diagonale). On dit qu'on cherche à *réduire* l'endomorphisme f.
Dans tout ce chapitre, toues les ev considérés seront de dimension finie.
En particulier, on considère un ev E de dimension finie n.

I. Changements de base

I.1. Matrice de passage

Définition (Matrice de passage)
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$* et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, *i.e.* :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \cdots \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_n)\big)$$

Exercice 1
Soit $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X-1)^2$, une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Preuve.

1. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

× $R_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $R_1 = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $R_2 = 1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Exprimons les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

- $P_0 = 1 \cdot R_0 + 0 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $P_1 = -1 \cdot R_0 + 1 \cdot R_1 + 0 \cdot R_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $P_2 = 1 \cdot R_0 + 2 \cdot R_1 + 1 \cdot R_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\square$

Proposition 1.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $u \in E$.
On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.
Alors on a :

$$X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, X'$$

Exercice 2
Avec les notations de l'exercice 1, déterminer les coordonnées du polynôme $T(X) = 4X^2 - 3X + 7$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Preuve.

- Comme $T = 7 \cdot P_0 - 3 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Comme $T = 8 \cdot R_0 + 5 \cdot R_1 + 4 \cdot R_2$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

- On vérifie bien :

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(T) \\ i.e. & \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

- On peut aussi écrire :

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(T) & = & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) \\ i.e. & \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\square$

⚠ Attention, il s'agit bien de $X = PX'$ et non pas $\cancel{X' = PX}$!

Commentaire

- On peut dégager de cette formule une règle d'écriture : les bases en regard de deux objets successifs doivent être les mêmes.
- Plus précisément :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x})$$

Proposition 2.
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors :

1. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ *est une matrice inversible*

2. $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

Commentaire

Il est souvent plus simple d'inverser la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ à l'aide du pivot de Gauss pour déterminer la matrice $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. Toutefois, il faut savoir interpréter $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1}$

Exercice 3
Retrouver la matrice de passage $Q = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ de l'exercice 1 par l'algorithme de Gauss-Jordan.

I.2. Changement de base et matrices semblables

Définition (Similitude)
Soit $(M, N) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.
On dit que les matrices M et N sont *semblables* ssi il existe une matrice P telle que :

$$M = PNP^{-1}$$

Commentaire

Noter que : $M = PNP^{-1} \iff N = P^{-1}MP$.

Commentaire

La relation de similitude (celle qui stipule qu'une matrice M est semblable à une matrice N) vérifie les propriétés suivantes :

1) elle est réflexive : M est semblable à M.

2) elle est symétrique : si M est semblable à N alors N est semblable à M.

3) elle est transitive : si M est semblable à N et N est semblable à R alors M est semblable à R.

Proposition 3.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \quad \textit{soit} \quad M = PNP^{-1}$$

Preuve.
Soit $u \in E$. On considère $v = f(u)$ et on note :

$$\begin{array}{lll} U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) & V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) & P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ U' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) & V' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v) & \end{array}$$

Avec ces notations :

$$\begin{array}{lll} & v = f(u) & \\ \Leftrightarrow & V = M\ U & \textit{(écriture de l'égalité sous forme matricielle dans la base } \mathscr{B}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & P\ V' = MP\ U' & \\ \Leftrightarrow & V' = P^{-1}MP\ U' & \\ \Leftrightarrow & N\ U' = P^{-1}MP\ U' & \end{array}$$

En effet : $V' = N\ U'$ (cela correspond à l'écriture matricielle de $v = f(u)$ dans la base $\mathscr{B}'$). On a donc démontré :

$$(P^{-1}MP - N)\ U' \ = \ 0$$

Ceci étant vrai pour tout U', on en déduit que $P^{-1}MP - N = 0$. □

Commentaire

On peut retenir cette formule sous la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

que l'on peut rapprocher une nouvelle fois de la relation de Chasles.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + 6a + 4b + 3c$.
Soit $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X - 1)^2$, une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$ et la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.

2. Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$, puis expliciter P.

Proposition 4.

Soit $(M, N) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Si M et N sont semblables (donc qu'il existe P une matrice inversible telle que $M = PNP^{-1}$). Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = PN^kP^{-1}$$

Preuve.

Démontrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: $M^k = PN^kP^{-1}$

- **Initialisation** :
  D'une part $M^0 = I_n$ et d'autre part $PN^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $M^{k+1} = PN^{k+1}P^{-1}$)

$$\begin{array}{rcl} M^{k+1} & = & M \times M^k \\ & = & PNP^{-1} \times PN^kP^{-1} \\ & = & PN \times P^{-1}P \times N^kP^{-1} \\ & = & PN \times I_n \times N^kP^{-1} \\ & = & PN \times N^kP^{-1} \\ & = & PN^{k+1}P^{-1} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Le principe de récurrence nous assure que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M = PN^kP^{-1}$. □

Commentaire

Un point rédaction

Cette question est un grand classique des concours. On peut alors s'interroger sur la nécessité de rédiger une telle récurrence. De manière générale :

× s'il est demandé explicitement dans l'énoncé de démontrer une propriété, il est alors conseillé de rédiger entièrement et rigoureusement.

× si le résultat n'apparaît pas dans l'énoncé mais qu'on doit s'en servir pour répondre à une question, il suffit alors de rappeler le résultat (en ajoutant « par une récurrence immédiate » dans le cas qui nous intéresse ici).

Exercice 5

Soit M la matrice de f trouvée dans l'exo 4.
Déterminer la matrice M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer R^2.

2. Utiliser la formule du binôme pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ N^n = D^n + nD^{n-1}R$$

Preuve.

- $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Remarquons tout d'abord que :
  $$DR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = RD$$
  Ainsi D et R commutent.

  D'après la formule du binôme de Newton :
  $$\begin{array}{rcll} N^n & = & (D+R)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R^k D^{n-k} & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} R^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} R^k D^{n-k} & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} R^k D^{n-k} & \textit{(car par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 2, \ R^k = 0 \textit{)} \\ & = & \binom{n}{0} R^0 \ D^n + \binom{n}{1} R^1 \ D^{n-1} & \\ & = & D^n + n \ D^{n-1} \ R & \textit{(car } R \textit{ et } D^{n-1} \textit{ commutent)} \end{array}$$

□

Proposition 5.
Deux matrices sont semblables ssi elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Commentaire

Si M et N représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, la propriété précédente permet de justifier *l'existence* d'une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$ *sans avoir à calculer explicitement* P.
La matrice P en question est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Exercice 7. *Exercice récapitulatif*
On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & \varphi(P) \end{array}$$

où $(\varphi(P))(X) = \dfrac{1}{3}\,(a_0 + 4\,a_1 + 4\,a_2) + \dfrac{1}{3}\,(2\,a_0 - a_1 - 7\,a_2)\ X + 2a_2\ X^2$
pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$.

1. Démontrer que φ est un endomorphisme.

Preuve.

(i) φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(ii) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.
Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ et $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 \quad \text{et} \quad Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$$

On a alors :

$$(\lambda P + \mu Q)(X) = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)\,X + (\lambda a_2 + \mu b_2)\,X^2$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} & & (\varphi(\lambda P + \mu Q))(X) \\ = & & \dfrac{1}{3}\,((\lambda a_0 + \mu b_0) + 4(\lambda a_1 + \mu b_1) + 4(\lambda a_2 + \mu b_2)) \\ & + & \dfrac{1}{3}\,(2\,(\lambda a_0 + \mu b_0) - (\lambda a_1 + \mu b_1) - 7\,(\lambda a_2 + \mu b_2))\ X \\ & + & 2\ (\lambda a_2 + \mu b_2)\ X^2 \\ = & & \dfrac{1}{3}\,(\lambda a_0 + 4\lambda\,a_1 + 4\lambda\,a_2) + \dfrac{1}{3}\,(2\lambda\,a_0 - \lambda a_1 - 7\,\lambda a_2)\ X + 2\lambda a_2\ X^2 \\ & + & \dfrac{1}{3}\,(\mu b_0 + 4\mu\,b_1 + 4\mu\,b_2) + \dfrac{1}{3}\,(2\mu\,b_0 - \mu b_1 - 7\,\mu b_2)\ X + 2\mu b_2\ X^2 \\ = & & \lambda\ (\varphi(P))(X) + \mu\ (\varphi(Q))(X) \\ = & & (\lambda\ \varphi(P) + \mu\ \varphi(Q))(X) \end{array}$$

Ainsi : $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\ \varphi(P) + \mu\ \varphi(Q)$.

φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. □

2. On note $Q_0(X) = X - 1$, $Q_1(X) = X + 2$ et $Q_2(X) = X^2 - X$.
Démontrer que (Q_0, Q_1, Q_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Preuve.

- Démontrons que $\tilde{\mathscr{B}} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ll} \text{Supposons que} & \lambda_1 Q_0 + \lambda_2 Q_1 + \lambda_3 Q_3 = 0 \\ \textit{i.e.} & \lambda_1 (X-1) + \lambda_2 (X+2) + \lambda_3 (X^2 - X) = 0 \\ \text{ou encore} & (-\lambda_1 + 2\lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) X + \lambda_3 X^2 = 0 \end{array}$$

  Par identification, on obtient : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$

  ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $\tilde{\mathscr{B}}$ est donc libre.

- De plus, $\mathrm{Card}(\tilde{\mathscr{B}}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
  La famille $\tilde{\mathscr{B}}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. □

3. Déterminer $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.

Preuve.

- $\varphi(P_0) = \frac{1}{3} \cdot P_0 + \frac{2}{3} \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(P_0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\varphi(P_1) = \frac{4}{3} \cdot P_0 - \frac{1}{3} \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(P_1)) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\varphi(P_2) = \frac{4}{3} \cdot P_0 - \frac{7}{3} \cdot P_1 + 2 \cdot P_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R_2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ □

4. Déterminer $N = \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\varphi)$.

Preuve.

- $\varphi(Q_0) = -1 \cdot Q_0 + 0 \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\varphi(Q_0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\varphi(Q_1) = 0 \cdot Q_0 + 1 \cdot Q_1 + 0 \cdot Q_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\varphi(Q_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\varphi(Q_2) = 0 \cdot Q_0 + 0 \cdot Q_1 + 2 \cdot Q_2$

  Donc $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(R_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $N = \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathscr{B}}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ □

5. Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\tilde{\mathscr{B}}$?

Preuve.
Exprimons les vecteurs de la base $\tilde{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$.

× $Q_0 = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $Q_1 = 2 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $Q_2 = 0 \cdot P_0 - 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi : $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

6. Déterminer P^{-1}. Donner une interprétation de cette matrice.

Preuve.
En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de passage de la base $\tilde{\mathscr{B}}$ à la base $\mathscr{B}$. □

7. Quel est le lien entre les trois matrices précédentes ?
Déterminer alors M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Preuve.
$M = P\ N\ P^{-1}$ et $M^n = (P\ N\ P^{-1})^n = P\ N^n\ P^{-1}$. D'où :

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2 & 2\left((-1)^{n+1} + 1\right) & 2\left((-1)^{n+1} + 1\right) \\ (-1)^{n+1} + 1 & 2\,(-1)^n + 1 & 2\,(-1)^n + 1 - 3 \times 2^n \\ 0 & 0 & 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

□

II. Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres

II.1. Définitions

Définition (Valeur propre, vecteur propre)

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
  On dit qu'un réel λ est une *valeur propre* de l'endomorphisme f ssi il existe $u \in E$ tel que :
  $$u \neq 0_E \quad \text{et } f(u) = \lambda u$$
  Un vecteur u vérifiant cette égalité est appelé une *vecteur propre de f associé à la valeur propre λ*
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  On dit qu'un réel λ est une *valeur propre* de la matrice A ssi il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :
  $$X \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \quad \text{et } AX = \lambda X$$
  Un vecteur X vérifiant cette égalité est appel un *vecteur propre de A associé à la valeur propre λ*

Définition (Spectre)

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé *spectre de f* et est noté $\text{Sp}(f)$.
- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé *spectre de A* et est noté $\text{Sp}(A)$

⚠ Un endomorphisme (ou une matrice) n'admet pas forcément de valeur propre.

MÉTHODO

Pour montrer qu'un vecteur u (resp. X) donné est un vecteur propre de f (resp. A), il faut :

1. Vérifier que ce vecteur est non nul

2. Calculer $f(u)$ (resp. AX) et faire apparaître λu (reps. λX). La valeur de λ trouvée sera la valeur propre associée à u (resp. X).

Exercice 8

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par : $f(P) = (X-1)P' + P$. On pose $R(X) = (X-1)^2$.
Calculer $f(R)$. Que peut-on en déduire ?

$$\begin{array}{rcl} (f(R_2))(X) & = & (X-1)\ R_2'(X) + R_2(X) \\ & = & (X-1)\ 2(X-1) + (X-1)^2 = 3\ (X-1)^2 \\ & = & 3\ R_2(X) \end{array}$$

Ainsi, $f(R_2) = 3\ R_2$.
R_2 est vecteur propre de f, associé à la valeur propre 3.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. Montrer que $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

$$\begin{array}{rcl} AX & = & \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & = & 3\ X \end{array}$$

Ainsi, $AX = 3\ X$.
X est vecteur propre de A, asoocié à la valeur propre 3.

Commentaire

- Dans la définition de valeur propre λ de f, il est que le vecteur u tel que $f(u) = \lambda \cdot u$ doit être **non nul**. Ceci est primordial.
  Sans cete hypothèse, tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ serait valeur propre.
  En effet, on peut toujours écrire :
  $$f(0_E) = \lambda \cdot 0_E$$
  Cette égalité ne permet **en aucun cas** de démontrer que λ est valeur propre de f.
- En revanche, la définition n'impose pas de contrainte particulière sur le réel λ qui peut tout à fait être nul. Par exemple, si $f(P_0) = 0 \cdot P_0$, le réel 0 est valeur propre de f et P_0 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Théorème 1.

- *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et λ une valeur propre de f. On pose :*
  $$E_\lambda = \{u \in E \ / \ f(u) = \lambda \cdot u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$$
  E_λ est un sous-espace vectoriel de E que l'on appelle un sous-espace propre de f associé à λ
- *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. On pose :*
  $$E_\lambda = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda \cdot X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$$
  E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appelle sous-espace propre de A associé à λ

Preuve.
Montrons que E_λ est un ev dans le cas d'un endomorphisme (la preuve pour le cas matriciel est tout à fait similaire).

- $E_\lambda \subset E$
- 0_E vérifie d'un part $f(0_E) = 0_E$ car f est une application linéaire, et d'autre part $\lambda \cdot 0_E = 0_E$. Donc $0_E \in E_\lambda$.
- Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_1, u_2) \in E_\lambda^2$. On cherche à montrer que $\mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2 \in E_\lambda$.
  $$\begin{array}{rcll} f(\mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2) & = & \mu_1 f(u_1) + \mu_2 \cdot f(u_2) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \mu_1 \, \lambda \cdot u_1 + \mu_2 \, \lambda \cdot u_2 & \textit{(car } (u_1, u_2) \in \big(E_\lambda\big)^2 \textit{)} \\ & = & \lambda(\mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2) & \end{array}$$
  Donc $\mu_1 \cdot u_1 + \mu_2 \cdot u_2 \in E_\lambda$

Finalement, E_λ est un sev de E, donc c'est un ev. □

Commentaire

- Le sous-espace propre E_λ contient tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.
- S'il y a des risques de confusion, on pourra noter $E_\lambda(f)$ ou $E_\lambda(A)$.

II.2. Liens entre éléments propres de f et de A

Proposition 6.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Soit u un vecteur de E et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

1. *Alors : $f(u) = \lambda \cdot u \ \Leftrightarrow\ AU = \lambda \cdot U$*

2. *En conséquence :*

λ est valeur propre de f	$\Leftrightarrow$	*λ est valeur propre de A*

et donc $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ	$\Leftrightarrow$	*Le vecteur U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ*

Commentaire

Cette proposition montre que l'on peut utiliser la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ pour trouver les valeurs propres de f. Dans la pratique, il sera plus aisé de déterminer le spectre de la matrice A.

⚠ Un vecteur propre de f (qui est un vecteur de E) n'est pas un vecteur propre de A (qui est un vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
Par contre, on peut déduire l'expression d'un vecteur propre de f à partir d'un vecteur propre de A et inversement.

II.3. Caractérisation des éléments propres

Théorème 2.

1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*
Les propositions suivantes sont équivalentes.
- ***i)*** *Le réel λ est une valeur propre de f.*
- ***ii)*** *L'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas bijectif.*
- ***iii)*** *L'ensemble $\ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0_E\}$.*

2. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
Les propositions suivantes sont équivalentes.
- ***i)*** *Le réel λ est une valeur propre de A.*
- ***ii)*** *La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.*
- ***iii)*** *L'ensemble $\{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, (A - \lambda I)\, U = 0\} \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.*

Preuve.

1. • $f - \lambda \mathrm{id}$ est un endomorphisme de E, ev de dimension finie. Ainsi :

$$\begin{aligned} & f - \lambda \mathrm{id} \text{ est bijectif} \\ \Leftrightarrow\ & f - \lambda \mathrm{id} \text{ est injectif} \\ \Leftrightarrow\ & \ker(f - \lambda \mathrm{id}) = \{0_E\} \end{aligned}$$

Les négations de ces propositions étant aussi équivalentes, on en déduit que : ***ii)*** $\Leftrightarrow$ ***iii)***.

- Démontrons alors ***i)*** $\Leftrightarrow$ ***ii)***. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda\, u &\Leftrightarrow f(u) - \lambda\, u = 0_E \\ &\Leftrightarrow f(u) - (\lambda\ \mathrm{id}_E)\ u = 0_E \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda\ \mathrm{id}_E)\ u = 0_E \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} &\lambda \text{ est valeur propre de } f \\ \Leftrightarrow\ &\text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } f(u) = \lambda\, u \\ \Leftrightarrow\ &\text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda\ \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ \Leftrightarrow\ &\text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } u \in \ker(f - \lambda\ \mathrm{id}_E) \end{aligned}$$

□

MÉTHODO

Le plus souvent, pour montrer qu'un réel λ *donné* est une valeur propre de A (resp. f), on montre que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ (resp. $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$) *en déterminant une famille génératrice de cet espace.* Cette méthode permet alors d'obtenir une base de l'espace propre $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ (resp. $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$) associé à λ.

Exercice 9

Les réels $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ sont-ils des valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$?

Si c'est le cas, donner une base de l'espace propre associé.

Proposition 7.

- *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$.
  0 *est une valeur propre de* $f \iff f$ *n'est pas bijective* $\iff \mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.
- *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  0 *est une valeur propre de* $A \iff A$ *n'est pas inversible* $\iff \mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$.

Proposition 8.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (ou diagonale) sont ses éléments diagonaux.

Preuve.

Soit A une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \begin{array}{l}\lambda \text{ est valeur} \\ \text{propre de } A\end{array} &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{l'un (au moins) des cœfficients diagonaux de} \\ A - \lambda I_n \text{ (qui est } \textbf{triangulaire supérieure}\text{) est nul}\end{array} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que : } a_{i,i} - \lambda = 0 \end{aligned}$$

(attention : ceci n'est vrai que parce $A - \lambda I_n$ est triangulaire)

On en déduit :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \mid \text{ il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \lambda = a_{i,i}\} = \{a_{i,i} \mid i \in [\![1, n]\!]\}$$

□

Exercice 10
Donner deux exemples de matrices qui admettent $\lambda = 0$ comme valeur propre.

La méthode suivante permet de trouver les valeurs propres d'une matrice A quand aucune indication n'est donnée par l'énoncé (aucune valeur propre, aucun vecteur propre).

`MÉTHODO`

1. On écrit la matrice $A - \lambda I_n$ où λ est inconnu.

2. On calcule le rang de $A - \lambda I_n$.
En opérant par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (ce qui ne modifie pas le rang), on obtient une matrice réduite sous forme triangulaire supérieure.
(cela consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss)

3. Les valeurs propres de la matrice A sont exactement les valeurs de λ qui annulent un des coefficients diagonaux de la matrice réduite.

Exercice 11
Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On détermine le rang de $A - \lambda\ I_3$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda\ I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)\ L_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & -8+6\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

  On remarque enfin :

$$-8 + 6\lambda - \lambda^2 = -(8 - 6\lambda + \lambda^2) = -(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

  Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda\ I_3$ n'est pas inversible.
  Autrement dit, les réels λ tels que $\text{rg}(A - \lambda\ I_3) \neq 3$ *i.e.* les valeurs de λ qui annulent un coefficient diagonal de la réduite.
  Ainsi : $\text{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On détermine le rang de $B - \lambda\ I_3$.

$$\mathrm{rg}(B - \lambda\ I_3) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

  Les valeurs propres de B sont les réels λ tels que $B - \lambda\ I_3$ n'est pas inversible.
  Autrement dit, les réels λ tels que $\mathrm{rg}(B - \lambda\ I_3) \neq 3$ *i.e.* les valeurs de λ qui annulent un coefficient diagonal de $B - \lambda I_3$ (qui apparaît directement sous forme triangulaire supérieure).
  Ainsi : $\mathrm{Sp}(B) = \{3, 5\}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Pour les matrices carrées d'ordre 2 on utilise la caractérisation suivante :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A \quad & \Leftrightarrow \quad A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_2) = 0 \end{aligned}$$

  Déterminons alors $\det(C - \lambda I_2)$.

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \ & = \ (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 \\ & = \ 3 - 4\ \lambda + \lambda^2 + 1 \\ & = \ 4 - 4\lambda + \lambda^2 \\ & = \ (2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

  Les valeurs propres de C sont les réels λ tels que $C - \lambda\ I_2$ n'est pas inversible. Autrement dit, les réels λ tels que $\det(C - \lambda\ I_2) = 0$.
  Ainsi : $\mathrm{Sp}(C) = \{2\}$.

- Déterminons enfin $\det(D - \lambda I_2)$.

$$\det(D - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 + 1$$

  Il n'existe pas de réel λ tel que $\lambda^2 = -1$.
  On en déduit que $\mathrm{Sp}(D) = \varnothing$ □

Commentaire

Ce dernier exemple démontre qu'il existe des endomorphismes (resp. des matrices carrées) qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

Étant donnée une valeur propre d'un matrice A, la méthode suivante permet de déterminer l'espace propre associé.

`MÉTHODO`

Pour chaque valeur propre λ de A, on obtient une base du sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ en résolvant le système d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ suivant :

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

Exercice 13

Déterminer les sous-espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

II.4. Polynômes annulateurs

Définition (Polynôme annulateur)

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
  On appelle *polynôme annulateur de* f un polynôme P non nul appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0$
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  On appelle *polynôme annulateur de* A un polynôme QP non nul appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$

Commentaire

$P(f)$ est un endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$, où :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{le symbole } \circ \text{ apparaît } k-1 \text{ fois}} \end{cases}$$

Commentaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base de l'ev E (de dimension finie $n \geqslant 1$).
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ P(A) = 0$$

(par isomorphisme de rerésentation)
On en déduit que :

P est une polynôme annulateur de f $\Leftrightarrow$ P est un polynôme annulateur de A

Exemple

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

Théorème 3.

- *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$.
  Il existe un polynôme annulateur de f ***non nul****.*
- *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  Il existe un polynôme annulateur de A ***non nul****.*

Preuve.
Considérons la famille $(A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n^2})$.
Cette famille contient n^2+1 éléments dans l'ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est fini de dimension n^2. On en déduit que cette famille est liée.
Il existe donc un n^2+1 uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que :

$$\alpha_0 \ A^0 + \ldots + \alpha_{n^2} \ A^{n^2} \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Le polynôme P défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k \ X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de A. □

Commentaire

En fait, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n, mais ce résultat est hors-programme.

Proposition 9.

- *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$.
  Si P *est un polynôme annulateur de* f*, alors toute valeur propre de* f *est racine de* P *:*

  $$\lambda \textit{ valeur propre de } f \quad \Rightarrow \quad Q(\lambda) = 0$$

  Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ P(\lambda) = 0\}$.
- *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  Si P *est un polynôme annulateur de* A*, alors toute valeur propre de* A *est racine de* P *:*

  $$\lambda \textit{ valeur propre de } A \quad \Rightarrow \quad Q(\lambda) = 0$$

  Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \ / \ P(\lambda) = 0\}$.

Preuve.
Soit λ une valeur propre de A et U un vecteur propre associé.

- Démontrons tout d'abord par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$
  où $\mathcal{P}(k)$: $A^k U = \lambda^k U$.
  - ▸ **Initialisation** :
    - × D'une part $A^0 U = I \times U = U$.
    - × D'autre part $\lambda^0 U = 1 \cdot U = U$.

    On a bien $A^0 U = \lambda^0 U$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $A^{k+1} U = \lambda^{k+1} U$).

    $$A^{k+1} U \ = \ A(A^k U) \ = \ A(\lambda^k U) \ = \ \lambda^k A U \ = \ \lambda^k \lambda U \ = \ \lambda^{k+1} U$$

    D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

- Considérons un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
  Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$.
  Ainsi $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k\ A^k$ et en conséquence :

$$\begin{aligned} P(A)\ U \ &= \ \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\ A^k\right)\ U \ = \ \sum_{k=0}^{r} a_k\ A^k U \ = \ \sum_{k=0}^{r} a_k\ \lambda^k U \\ &= \ \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\ \lambda^k\right)\ U \ = \ P(\lambda)\ U \end{aligned}$$

- Si P est un polynôme annulateur de A, on sait de plus : $P(A) = 0$.
  On en déduit que : $P(A)\ U = 0 \cdot U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi :

$$P(\lambda)\ U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

  Or $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ puisque c'est un vecteur propre de A. Ainsi $P(\lambda) = 0$.

$\square$

Exercice 14

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exemple II.4.

On a démontré que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur.
Que peut-on déduire ?

Preuve.

- $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X - 1)\ (X + 3)$.
  Le polynôme P a deux racines : 1 et -3. On en déduit que :

$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{1, -3\}$$

- Pour déterminer si 1 (resp. -3) est valeur propre de A, on résout le système : $(A - I_3)\ X = 0$ (resp. $(A + 3I_3)\ X = 0$).
  × Si ce système est de Cramer (admet pour unique solution $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$) alors 1 (resp. -3) n'est pas valeur propre de A.
  × Si ce système n'est pas de Cramer, l'ensemble des solutions de ce système est par définition $E_1(A)$ (resp. $E_{-3}(A)$).
  (c'est le cas, on l'a fait précédemment)

$\square$

⚠

Ce résultat n'est en aucun cas une équivalence !

$$\lambda \text{ une valeur propre de } A \ \cancel{\Longleftrightarrow} \ \lambda \text{ est une racine de } P$$

Si on reprend l'exemple précédent, puisque P est un polynôme annulateur de A, alors, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $R_\beta(X) = (X - \beta)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A :

$$R_\beta(A) = (A - \beta\ I)\ P(A) = 0$$

Mais β racine de R_β ne démontre pas que β est valeur propre de A. Sinon tout β serait valeur propre de A et on aurait ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{R}$.

II.5. Propriétés

Théorème 4.
Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

- *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *des valeurs propres* **distinctes** *de* f.
  On note $u_1, \ldots, u_p$ *des vecteurs propres associés aux valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. *Alors :*
  $$\text{La famille } (u_1, \ldots, u_p) \text{ est une famille libre de } E$$
- *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *des valeurs propres* **distinctes** *de* A.
  On note $X_1, \ldots, X_p$ *des vecteurs propres colonne associés aux valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. *Alors :*
  $$\text{La famille } (X_1, \ldots, X_p) \text{ est une famille libre de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Corollaire 1.
Si $\dim(E) = n$ *et si* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont* n *valeurs propres* **distinctes** *et si* $u_1, \ldots, u_n$ *sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres alors la famille* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est une base de* E.
On dit que c'est une base de vecteurs propres.

Corollaire 2.

- *Si* $\dim(E) = n$, *un endomorphisme admet au plus* n *valeurs propres.*
- *Une matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *admet au plus* n *valeurs propres.*

III. Théorèmes de réduction

III.1. Matrice ou endomorphisme diagonalisable

Définition (Diagonalisabilité)

- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice diagonalisable* ssi il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :
  $$A = PDP^{-1}$$
- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est *diagonalisable* ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

Théorème 5.

- $f \in \mathscr{L}(E)$ *est diagonalisable ssi il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* f *est diagonale.*
- *Soit* $\mathscr{B}$ *une base de* E *et* $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. *Alors :*
  $$f \text{ est diagonalisable ssi } M \text{ est diagonalisable.}$$

III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Théorème 6.

- *Soit* $f \in \mathscr{L}(E)$. *Soit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *toutes les valeurs propres* **distinctes** *de* f *et* $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_k}(f))$ *les sous-espaces propres associés. Alors on a :*
  $$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)$$
- *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Soit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *toutes les valeurs propres* **distinctes** *de* A *et* $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_k}(A)$ *les sous-espaces propres associés. Alors on a :*
  $$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n \quad \text{(taille de la matrice)}$$

Commentaire

- Ainsi, f (resp. A) est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E (resp. n).
- Pour déterminer si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable, ce n'est pas le nombre de valeurs propres qui importe mais plutôt le « nombre total » de vecteurs propres.

Exercice 15

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et A la matrice canoniquement associée à f.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer les valeurs propres de f.

b. Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de f.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d. Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On explicitera P et P^{-1}.

e. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f. Quelle propriété a A^n ? Pourquoi ?

Théorème 7.

- *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle que* $\dim(E) = n$

  Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

- *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

  Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Preuve.
Supposons que f admet n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- Tout d'abord, remarquons que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geqslant 1$.

  En effet, puisque λ_i est valeur propre de f, il existe $u_i \neq \mathbf{0}$ tel que :

  $$f(u) = \lambda_i \cdot u_i$$

  Ainsi, $E_{\lambda_i}(f) \supset \mathrm{Vect}\,(u_i)$ et donc $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geqslant \dim(\mathrm{Vect}\,(u_i)) = 1$.

- Considérons alors $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ famille de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n.

  × $\mathscr{F}$ est une famille libre car composée de n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes.

  × De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$.

  On en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de E. Elle est constituée de vecteurs propres. Donc f est diagonalisable.

□

Commentaire

Si f admet n valeurs propres, on peut conclure directement que f (ou A) est diagonalisable sans avoir à rechercher les sous-espaces propres.

Proposition 10.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ est diagonalisable} \\ A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad A = \lambda I_n$$

Preuve.

- « $\Leftarrow$ »
  Si $A = \lambda I_n$, alors A est diagonale, donc en particulier diagonalisable.
- « $\Rightarrow$ »
  Si A est diagonalisable alors il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

  $$A = PDP^{-1}$$

  où D est une matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont les valeurs propres de A. Comme A n'a qu'une seule valeur propre : $D = \lambda I_n$.
  Et ainsi :

  $$A \ = \ P(\lambda\ I_n)P^{-1} \ = \ \lambda PP^{-1} \ = \ \lambda\ I_n$$

$\square$

Commentaire

- Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer, par l'absurde, qu'une matrice n'ayant qu'une valeur propre λ n'est pas diagonalisable.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais on le son usage est fréquent dans les énoncés. Il faut donc connaître la démonstration.

Exercice 16

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2. La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Preuve.

1. La matrice M est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses cœfficients diagonaux. Ainsi :

$$\text{Sp}(M) = \{3, 4, 5\}$$

La matrice M est d'ordre 3.
Elle possède 3 valeurs propres disctinctes.
Elle est donc diagonalisable. Autrement dit, il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

2. La matrice N est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(N) = \{1\}$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose que la matrice N est diagonalisable.
Alors il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale contenant les valeurs propres de N telles que : $N = PDP^{-1}$.
Or $\mathrm{Sp}(N) = \{1\}$. Donc :

$$N = PDP^{-1} = P\, I_3\, P^{-1} = PP^{-1} = I_3$$

Ceci est absurde. Ainsi, N n'est pas diagonalisable.

□

III.3. Matrices symétriques

Définition (Matrice symétrique)
Une matrice qui vérifie ${}^tA = A$ est dite *symétrique*.
Autrement dit, A est **symétrique** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Théorème 8.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Commentaire

Ainsi, lorsque A est symétrique, on peut conclure directement que A est diagonalisable.
Cependant, on ne connaît ni les valeurs propres ni les espaces propres de A. Il faudra les déterminer pour diagonaliser A.

Exercice 17
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?