Probabilités générales et discrètes

I. Espaces probabilisés

On souhaite généraliser la notion d'espaces probabilisés sur des ensembles qui ne sont pas nécessairement finis. On notera dans la suite Ω un ensemble non nécessairement fini qu'on appellera *univers*.

I.1. Notion de tribu

Définition (Tribu)
Soit $\mathscr{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que $\mathscr{A}$ est une tribu de Ω si

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$
2. Pour tout élément A de $\mathscr{A}$, le complémentaire de A, noté $\overline{A}$, appartient aussi à $\mathscr{A}$
(stabilité par passage au complémentaire)
3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de $\mathscr{A}$: $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$
(stabilité par union dénombrable)

Commentaire

Vocabulaire
- Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés *événements*.
- L'événement $\varnothing$ est appelé *événement impossible*.
- L'événement Ω est appelé *événement certain*.
- L'événement $\bar{A}$ est appelé *événement contraire* de A.

Commentaire

Intuitivement, une tribu est l'ensemble des événements de l'univers Ω que l'on peut observer. Lorsque Ω est un ensemble fini, on prend toujours comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Cependant, lorsque Ω est infini, ce n'est pas toujours une hypothèse réaliste de supposer que tous les événements sont observables.

Exemple
Lorsqu'on demande un nombre réel au hasard entre 0 et 1, l'ordinateur nous donne un nombre avec 10 chiffres après la virgule. L'événement « le 10000-ième chiffre après la virgule est impair » n'est pas observable.

Exemple

1. Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience
- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ». $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.
  Événement : propriété de l'expérience qui peut être vérifiée ou non
- Notons ω le résultat de l'expérience.
  On dira que l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience vérifie l'événement. Autrement dit, si $\omega \in A$.

2. Expérience : on lance indéfiniment un dé 6 et on considère la suite des résultats obtenus.

- Univers : $\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}$, ensemble des suites à valeur dans $[\![1, 6]\!]$.
- Considérons l'événement F_i : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
  L'ensemble $F_i \subset [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}$ est un ensemble de suites : il est constitué de toutes les suites dont le $i^{\text{ème}}$ élément est 6.
- Notons G l'événement : « on obtient (au moins une fois) 6 lors des 10 premiers lancers ».
  Il s'écrit $G = \bigcup\limits_{i=1}^{10} F_i$.
  Cet événement est réalisé si 6 est obtenu soit lors du 1^{er} lancer, soit lors du $2^{\text{ème}}$, ..., soit lors du $10^{\text{ème}}$ lancer.
- Considérons H : « on obtient 6 (au moins une fois) lors de la partie ». Il s'écrit $F = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} F_i$
  Cet événement est réalisé si 6 est obtenu lors du 1^{er} lancer, ou lors du $2^{\text{ème}}$, ou lors du $3^{\text{ème}}$ lancer ...
- De même, on peut considérer l'événement : $S = \bigcap\limits_{i=1}^{4} F_i$
  Cet événement est constitué de l'ensemble des suites dont les 4 premiers éléments sont 6.
- Et enfin l'événement : $T = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}^*} F_i$
  Cet événement est constitué de l'ensemble des suites dont les tous éléments sont 6 : il est donc réduit à la suite constante de valeur 6.
- Considérons maintenant $U = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j \geqslant i} F_j$ et notons $C_i = \bigcap\limits_{j \geqslant i} F_j$.

  Un tirage ω réalise $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} C_i$ si ce tirage réalise C_i pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$.

  Autrement dit : $\omega \in \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} C_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*, \ \omega \in C_i$

  Or : $\omega \in C_i \Leftrightarrow \omega \in \bigcap\limits_{j \geqslant i} F_j \Leftrightarrow \forall j \geqslant i, \ \omega \in F_j$

  En résumé : $\omega \in U = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j \geqslant i} F_j \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^*, \ \forall j \geqslant i, \ \omega \in F_j$

  Dire que ω réalise U c'est donc dire qu'il existe un rang $i \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel ω réalise tous les événements F_j *i.e.* à partir duquel le tirage ne contient que des 6.
  U est donc composé de tous les tirages qui contiennent une infinité successive de 6.

- Considérons maintenant $V = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j \geqslant i} F_j$ et notons $D_i = \bigcup_{j \geqslant i} F_j$.

  Un tirage ω réalise $\bigcap_{i=1}^{+\infty} D_i$ si ce tirage réalise tous les événements D_i.

  Autrement dit : $\omega \in \bigcap_{i=1}^{+\infty} D_i \;\Leftrightarrow\; \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in D_i$

  Or : $\omega \in D_i \;\Leftrightarrow\; \omega \in \bigcup_{j \geqslant i} F_j \;\Leftrightarrow\; \exists j \geqslant i,\ \omega \in F_j$

  En résumé : $\omega \in U = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j \geqslant i} F_j \;\Leftrightarrow\; \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists j \geqslant i,\ \omega \in F_j$

  Dire que ω réalise V c'est donc dire que pour n'importe quel rang $i \in \mathbb{N}^*$, il est possible de trouver un rang supérieur j tel que ω réalise F_j. Ou encore que pour n'importe quel lancer du tirage on peut trouver un lancer ultérieur qui est un 6.
  U est donc composé de tous les tirages qui contiennent une infinité (pas forcément successive !) de 6.

Proposition 1.
Soit $\mathscr{A}$ une tribu de Ω. Alors :

1. $\Omega \in \mathscr{A}$,

2. *Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a :*

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.$$

3. *Si $I \subseteq \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$, on a :*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{sont des éléments de } \mathscr{A}.$$

Preuve.

1. Comme $\varnothing \in \mathscr{A}$, par passage au complémentaire on a : $\Omega = \overline{\varnothing} \in \mathscr{A}$.

2. Si $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on considère la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :
   - × $C_0 = A$,
   - × $C_1 = B$,
   - × et $C_k = \varnothing$ pour tout $k \geqslant 2$.

   On a alors : $\bigcup_{i=0}^{+\infty} C_i = A \cup B \ \in \ \mathscr{A}$.

   On en déduit que $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \ \in \ \mathscr{A}$ car $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont dans $\mathscr{A}$.

3. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ on considère la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :
   - × $C_i = A_i$ si $i \in I$,
   - × et $C_i = \varnothing$ pour tout $i \notin I$.

   On a alors : $\bigcup_{i=0}^{+\infty} C_i = \bigcup_{i \in I} A_i \ \in \ \mathscr{A}$.

   On en déduit que $\bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i} \ \in \ \mathscr{A}$ car tous les $\bar{A}_i$ sont dans $\mathscr{A}$.

□

I.2. Système complet d'événements

Définition (Événements incompatibles)
Soit $\mathscr{A}$ une tribu de Ω.
Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ un couple d'événements.
Les événements de A sont dits *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.

Définition (Système complet d'événements)
Soit $\mathscr{A}$ une tribu de Ω.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.
La famille $(A_i)_{i\in I}$ est un *système complet d'événements* si :

1. Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
(les événements sont deux à deux incompatibles)

2. $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$

Exemple
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit A un événement.
La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

Commentaire

- Si on sait de plus que : $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, on obtient une partition de Ω.
  On peut reprendre l'analogie du puzzle. Les événements A_i sont les pièces.
  1) Deux pièces ne se chevauchent jamais.
  2) Toutes les pièces mises côte à côte permettent de reconstituer le dessin qui n'est autre que Ω.
- On peut aussi relier la notion de système complet d'événements à celle de raisonnement par disjonction de cas (*resp.* faire le parallèle avec les structures conditionnelles).
  1) Le caractère disjoint des cas étudiés : deux cas ne peuvent être vrais en même temps.
  (*resp.* à l'aide de l'instruction `elif`, le 2ème branchement n'est considéré que si la condition de la 1ère branche n'est pas vérifiée et ainsi de suite)
  2) Le caractère exhaustif de la recherche : si on regroupe tous les cas étudiés, on obtient tous les cas possibles.
  (*resp.* on utilise l'instruction `else` (sans condition) dans la dernière branche ce qui assure qu'au moins un des blocs est exécuté)

I.3. Probabilité

À partir de maintenant, $\mathscr{A}$ désignera toujours une tribu de Ω.

Définition (Probabilité)
Soit $\mathscr{A}$ une tribu de Ω. Soit $\mathbb{P}$ une application de $\mathscr{A} \to [0,1]$.
On dit que P est une probabilité si elle vérifie :

1. $\forall A \in \mathscr{A}$, $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3. Pour toute famille d'événements incompatibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

(propriété de σ-additivité)

Pour tout événement A, le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'événement A.
On dira que le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé.*

Commentaire

Si A et B sont deux événements incompatibles, le point *2.* implique : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
La définition précédente généralise celle d'une probabilité sur un ensemble fini.

Commentaire

Vocabulaire
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Un événement A est dit **négligeable** ou **quasi-impossible** si : $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement A est dit **quasi certain** si : $\mathbb{P}(A) = 1$.
- Traduction en terme de propriété : soit $\mathcal{P}$ une propriété.
  Si $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ vérifie la propriété } \mathcal{P}\}$ et $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que la propriété est vérifiée **presque sûrement**.

I.4. Propriétés d'une probabilité

Proposition 2.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :

1. *Pour tous événements A et B tel que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*

2. *Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.*

3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5.
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

(formule du crible)

Preuve.

1. Pour tous événements A et B, les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}_{\geqslant 0}.$$

Donc $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$.

2. La famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements donc : $\mathbb{P}(\Omega) \ = \ \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) \ = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$.
Donc : $\mathbb{P}(A) \ = \ 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. On a : $(A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A) \ = \ \mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B)) \ = \ \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

4. On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point *2)* que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

5. Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\
&= \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\quad - (\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ ) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
&\quad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\
&\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

Définition (Suite monotone d'événements)
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille infinie d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que la famille est une *suite croissante d'événements* si pour tout $k \geqslant 0$, $A_k \subset A_{k+1}$.
- On dit que la famille est une *suite décroissante d'événements* si pour tout $k \geqslant 0$, $A_k \supset A_{k+1}$.

Théorème 1 (De la limite monotone.)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ($A_n \subset A_{n+1}$) alors :*

a) *la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,*

b) $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \ = \ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) \ = \ \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \ \mathbb{P}(A_n)$

2) *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ($A_n \supset A_{n+1}$) alors :*

a) *la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,*

b) $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \ = \ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) \ = \ \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \ \mathbb{P}(A_n)$

Preuve.
On montre seulement la propriété ***1)***.
La démonstration de la propriété ***2)*** est analogue.

a) Comme $A_n \subseteq A_{n+1}$, on a $\mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_{n+1})$. Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ est croissante. Elle est de plus majorée par 1 $(\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \leqslant 1)$ donc convergente vers $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

b) Afin de pouvoir utiliser la σ-additivité de l'application $\mathbb{P}$, on construit une suite (B_n) d'événements deux à deux incompatibles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$.

(ce qui implique $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$).

Pour cela, on pose :

- $B_0 = A_0$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1}) = A_k \setminus A_{k-1}$
  car $A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1} = A_{k-1}$ puisque (A_n) est une suite croissante.

Ainsi on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$

or : $\left|\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(B_k) & = & \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_k \cap A_{k-1}) \\ & = & \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) \\ \textit{(pour } k \geqslant 1\textit{)} & & \end{array}\right.$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

Et ainsi, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

□

Corollaire 1.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille quelconque d'événements de $\mathscr{A}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} E_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\right), \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} E_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} E_k\right) \end{aligned}$$

Preuve.
On applique le théorème de la limite monotone à la suite d'événements $A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} E_k$ qui est une suite croissante d'événements.
De même pour $B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} E_k$ qui est une suite décroissante d'événements. □

I.5. Généralisation de l'indépendance

On rappelle la notion d'indépendance :

Définition (Indépendance)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- On dit que deux événements A et B de $\mathscr{A}$ sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Soient $A_1, \ldots, A_n$ une famille finie de n événements.
  On dit que la famille est mutuellement indépendante si et seulement si pour toute partie I de $\{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Commentaire

Ainsi, pour montrer par exemple que 4 événements A, B, C et D sont indépendants, il faut vérifier 11 relations !

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ $\quad$ $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ $\quad$ $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D) \ldots$

$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ $\quad$ $\mathbb{P}(A \cap B \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(D)$ $\quad \ldots$

$\mathbb{P}(A \cap B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$

Commentaire

Cela revient à dire que toute sous famille finie d'événements de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille mutuellement indépendante.

I.6. Exemple d'expérience aléatoire infinie

On considère l'expérience suivante : on lance consécutivement une infinité de fois une pièce équilibrée.
On pose pour tout $k \geqslant 1$ les événements :

$$F_k = \text{« obtenir FACE au lancer numéro } k \text{ »}$$

On les suppose mutuellement indépendants et on a pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(F_k) = \frac{1}{2}.$$

On pose maintenant les événements :

$$\begin{aligned} A &= \text{« On a obtenu au moins une fois FACE parmi l'infinité de lancers »}, \\ B &= \text{« On a obtenu aucun FACE parmi l'infinité de lancers »}. \end{aligned}$$

On cherche à calculer la probabilité des événements A et B. Pour cela, on va écrire ces événements comme une suite d'événements plus simples dont on peut calculer la probabilité.
On pose pour tout $k \geqslant 1$:

$$A_k = \text{« On a obtenu au moins une fois FACE parmi les lancers de 0 à } k \text{ »} = \bigcup_{j=0}^{k} F_j.$$

De même, on pose pour tout $k \geqslant 1$:

$$B_k \;=\; \text{« On a obtenu aucun FACE parmi les lancers de 0 à } k \text{ »} \;=\; \bigcap_{j=0}^{k} \overline{F_j}.$$

Il est facile de voir que pour tout $k \geqslant 0$, on a $A_k \subset A_{k+1}$ et $B_k \supset B_{k+1}$. Ainsi, la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite croissante d'événements (resp. une suite décroissante d'événements). De plus :

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \quad \text{et} \quad B = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k.$$

On a donc par le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Maintenant, calculons pour tout $n \geqslant 0$, les probabilités $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$:

$$\mathbb{P}(B_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{F_k}\right) \underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{F_k}) \;=\; \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \;=\; \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$\mathbb{P}(A_n) \;=\; 1 - \mathbb{P}(B_n) \;=\; 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0.$$

Commentaire

On vient de rencontrer un événement qui n'est pas impossible mais dont la probabilité est égale à 0. Ainsi, sur un ensemble infini, $\varnothing$ (resp. Ω) n'est plus le seul événement de probabilité 0 (resp. 1). Pour un événement de probabilité 0, on dira qu'il ne se réalise presque sûrement jamais, et inversement, pour un événement de probabilité 1, on dira qu'il se réalise presque sûrement.

II. Probabilités conditionnelles

Définition (Probabilité conditionnelle)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements. On suppose $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle *probabilité de B sachant A* (ou *probabilité de B relativement à A*), et on note $\mathbb{P}_A(B)$ le nombre défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ est parfois notée $\mathbb{P}(B|A)$.

Proposition 3.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Alors l'application $\mathbb{P}_A : B \mapsto \mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité sur Ω.

Preuve.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1. Soit $B \in \mathscr{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A\cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$
- Comme $A\cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$

2. $\mathbb{P}_A(\Omega) \; = \; \dfrac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; 1$

3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \; = \; \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A\cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors $C_n = A \cap B_n$.
Les événements de la suite (C_n) sont deux à deux incompatibles.
En effet, si $i \neq j$:

$$C_i \cap C_j \; = \; (A\cap B_i) \; \cap \; (A\cap B_j) \; = \; A\cap(B_i\cap B_j) \; = \; A\cap\varnothing \; = \; \varnothing$$

Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, on a alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A\cap B_n)\right) \; = \; \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A\cap B_n)$.
Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \; = \; \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

□

Proposition 4.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout événement B et C, on a :

1) $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ *donc* $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B\cap C)$

3) *Si* $B \subset C$, $\mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$

4) $\mathbb{P}_A(B\cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B\cap C)$

5) *Si* (B_n) *suite d'événements , on a :*

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$$

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$$

Preuve.
L'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
Elle vérifie donc l'ensemble des propriétés des probabilités. □

Proposition 5. (Formule des probabilités composées)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

En particulier, si A et B sont deux événements de $\mathscr{A}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B).$$

Preuve.
On démontre par récurrence sur $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,
où $\mathcal{P}(n)$: pour tout $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathscr{A}^n$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

- **Initialisation** :
  Soit $A_1 \in \mathscr{A}$. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* pour tout $(A_1, \dots, A_{n+1}) \in \mathscr{A}^{n+1}$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})$)

  Soit $(A_1, \dots, A_{n+1}) \in \mathscr{A}^{n+1}$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$.
  Alors $\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})$ est bien définie et on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) \\
= \;& \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \\
= \;& \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\
= \;& \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1}) \times \left(\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
= \;& \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1})
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$. □

Proposition 6. (Formule des probabilités totales)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ un **système complet d'événements**.

- *Alors, pour tout événement B, on a :*

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \ \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

- *Supposons de plus : $\forall i \in \mathbb{N}, \ \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.*
  On peut alors écrire :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Preuve.

- Montrons d'abord que $B = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)$ et que cette union est disjointe.

  × Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$. Donc

$$\begin{array}{rcll} B & = & B \cap \Omega & \\ & = & B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) & \\ & = & \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i) & \textit{(d'après les lois de Morgan)} \end{array}$$

  × Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$.
  Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a en particulier que $A_i \cap A_j = \varnothing$. Donc :

$$\begin{array}{rcll} (B \cap A_i) \ \cap \ (B \cap A_j) & = & B \ \cap \ (A_i \cap A_j) & \textit{(d'après les lois de Morgan)} \\ & = & A \cap \varnothing & \\ & = & \varnothing & \end{array}$$

  Donc les événements $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles.

- Montrons maintenant la formule des probabilités totales.
  Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité,

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)\right) & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) & \textit{(car les événements } (B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B) & \textit{(si } \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0\textit{)} \end{array}$$

□

Commentaire

Cas particulier du SCE $(A, \overline{A})$
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A est un événement ($A \in \mathscr{A}$).
La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements fini.

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors, pour tout $B \in \mathscr{A}$, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) \ + \ \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Proposition 7 (Formule de Bayes)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de $\mathscr{A}$.
On suppose : $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A_j) \ = \ \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\mathbb{P}(B)} \ = \ \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

Preuve.
Comme $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A_i)$ est bien définie et on a :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Or : $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$.
De plus $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$$

Finalement, on a bien :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}$$

□

Commentaire

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors, pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire :

$$\mathbb{P}_B(A) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) \;+\; \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$$

III. Indépendance

Définition (Indépendance)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Deux événements A et B sont dits *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a de manière équivalente que A et B sont *indépendants* si :

$$\mathbb{P}_B(A) \;=\; \mathbb{P}(A)$$

Commentaire

On peut ainsi interpréter la notion d'indépendance entre deux événements A et B en disant que savoir si B s'est réalisé ou non n'apporte aucune information sur A.

Exemple
On considère l'expérience du jet d'un dé équilibré et on définit les événements :

$$\begin{aligned} A &= \text{« le dé est tombé sur un chiffre supérieure ou égale à deux »}, \\ B &= \text{« le numéro du dé est un nombre est impair »}. \end{aligned}$$

Ces deux événements sont indépendants. En effet :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \;=\; \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

> La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé 6 :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- On note A : « le résultat obtenu est inférieur à deux »
- On note B : « le résultat obtenu est supérieur à quatre »

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants suivant deux probabilités différentes.

- Cas 1 : dé équilibré
  L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est donc muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}^1$ déterminée par :
  $$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}^1(\{6\}) = \frac{1}{6}$$
  On a $\mathbb{P}^1(A) = \dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \neq 0$.
  - × On peut donc calculer $\mathbb{P}^1{}_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. On a donc $\mathbb{P}^1{}_A(B) = 0$.
  - × Or : $\mathbb{P}^1(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \neq \mathbb{P}^1{}_A(B)$.

  Ainsi, les événements A et B sont « dépendants » pour la probabilité $\mathbb{P}^1$.
- Cas 2 : dé pipé
  Le dé considéré permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.
  Autrement dit, l'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}^2$ déterminée par :
  $$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \ldots = \mathbb{P}^2(\{6\}) = 0$$
  - × On a $\mathbb{P}^2(A) = 1$, on peut donc calculer $\mathbb{P}^2{}_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2.
    On a donc encore $\mathbb{P}^2{}_A(B) = 0$.
  - × Or, étant donné le dé considéré, la probabilité d'obtenir un résultat supérieur 4 est :
    $\mathbb{P}^2(B) = 0 = \mathbb{P}^2{}_A(B)$.

  Ainsi, les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^2$.

> Ne pas confondre **événements indépendants** et événements incompatibles !
>
> ***1.*** A et B incompatibles $\not\Rightarrow$ A et B indépendants (pour $\mathbb{P}$)
>
> ***2.*** A et B incompatibles $\not\Leftarrow$ A et B indépendants (pour $\mathbb{P}$)

Exemples

1. On peut prendre le **Cas 1** de l'exemple III.
2. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

   On note A : « le premier chiffre est pair ».

   On note B : « le second chiffre est impair ».

   L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
   Le dé est supposé équilibré : on munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
   Démontrons que A, B sont indépendants.

   - $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

     De même : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{1}{2}$.

   - $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

   En effet : $A \cap B = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}$.

   On en déduit au passage que A et B ne sont pas incompatibles.

Proposition 8.
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit A et B deux événements indépendants. Alors $\overline{A}$ et B (resp. $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont aussi indépendants.*
2. *Tout événement A de probabilité égale à 1 ou 0 est indépendant de n'importe quel événement.*
3. *Tout événement A indépendant de lui même est de probabilité égale à* 0 *ou* 1.

Preuve.

1. Le système $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements. Donc $B = (B \cap A) \ \cup (B \cap \bar{A})$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) && \textit{(car } B \textit{ capA et } B \cap \bar{A} \textit{ sont incompatibles)} \\
&= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) && \textit{(car } A \textit{ et } B \textit{ sont indépendants)} \\
&= (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

2. Soit A un événement de probabilité 0 et soit B un événement quelconque. On sait que $A \cap B \subset A$ donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \ \leqslant \ \mathbb{P}(A) = 0.$$

   Comme une probabilité est positive, on a :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \ \leqslant \ \mathbb{P}(A) = 0$$

   donc : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
   De plus $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$, donc A et B sont bien indépendants. Dans le cas où A est de probabilité 1, alors $\overline{A}$ est de probabilité 0 et on applique la proposition précédente.

3. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$. Or $A \cap A = A$, on a donc finalement :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2 \implies \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0 \implies \mathbb{P}(A) = 0 \texttt{ OU } \mathbb{P}(A) = 1.$$

□

Définition (Événements indépendants deux à deux)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.
On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont *deux à deux indépendants* si pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \neq j$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$$

Définition (Indépendance mutuelle)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.
On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont *mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble $J \subset I$ **fini** :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Commentaire

En pratique, les situations d'indépendance sont explicites ou se déduisent du contexte. Un exemple fréquent est celui d'une expérience répétée à l'identique (jets consécutifs de dés ou de pièces, tirage de boules dans une urne avec remise,...).

⚠ Une famille d'événements *mutuellement indépendants* est une famille d'événements *deux à deux indépendants* mais le contraire est FAUX.
En effet, on considère l'expérience suivante : on lance deux pièces équilibrées de manières indépendantes et on définit les événements suivants :

A = « la première pièce est tombée sur pile »,

B = « la seconde pièce est tombée sur pile »,

C = « les deux pièces sont tombées sur la même chose »

On peut montrer que ces trois événements sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 1
On considère un paquet traditionnel de 52 cartes dont on tire aléatoirement une carte.
On définit les événements A = « la carte tirée est un valet » et B = « la carte tirée est un trêfle ».

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants.

2. On suppose que l'as de pique a été égaré et que le paquet ne contient plus que 51 cartes. Montrer que les événements A et B ne sont plus indépendants.

Exercice 2
On lance deux dés de manière indépendante et on définit les événements :

A = « le résultat du premier dé est pair »

B = « le résultat du second dé est impair »

C = « la somme des deux dés est paire »

Montrer que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants.

IV. Définition d'une variable aléatoire réelle

Définition (Variable aléatoire réelle)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
On appelle *variable aléatoire réelle* sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toute application :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array},$$

telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{A}$.

Commentaire

Ce qu'il faut retenir c'est qu'une variable aléatoire est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble des événements qui impliquent X doivent être observables (*i.e.* être dans la tribu $\mathscr{A}$). En pratique, on ne vérifiera jamais qu'une application est bien une variable aléatoire, cela sera toujours sous entendu.

Commentaire

Intuitivement, une variable aléatoire est une traduction mathématique d'une expérience aléatoire. Par exemple, pour l'expérience du jet d'un dé, on peut considérer la variable aléatoire X qui est égale au résultat du dé. Ainsi l'événement $\{$« le résultat du dé est 4 »$\}$ se traduira par : $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = 4\}$.
Une variable aléatoire peut aussi être une traduction de ce qui nous intéresse dans une expérience aléatoire. Par exemple, si l'on croise une personne au hasard dont on note X sa taille en centimètre et Y son âge, X et Y sont deux variables aléatoires.

Définition
Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera :

- $[X \leqslant x]$ (resp. $[X \geqslant x]$, $[X < x]$ et $[X > x]$) l'événement $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\}$.
  (resp. $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant x\}$, $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < x\}$ et $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > x\}$.)
- $[X = x]$ l'événement $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$.
- Plus généralement, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on notera : $[X \in I]$ l'événement $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in I\}$.

Commentaire

On pourra aussi écrire :

$$[X \in [x, y]] = [x \leqslant X \leqslant y] = [X \leqslant y] \cap [X \geqslant x]\,.$$

Proposition 9.
Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$\overline{[X \leqslant x]} = [X > x]\,,$$
- (Relation de Chasles) : *pour tous $x < y < z$,*
$$[x \leqslant X \leqslant y] \cup [y \leqslant X \leqslant z] = [x \leqslant X \leqslant z]\,,$$
- *Pour tous $x < y$,*
$$[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]\,.$$
- *Soient I et J deux intervalles disjoints, alors :*
$$[X \in I] \cap [X \in J] = \varnothing.$$
- *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$ formant une partition de $\mathbb{R}$, alors la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*
$$\forall n \geqslant 0,\ A_n = [X \in I_n]\,,$$
forme un système complet d'événements.

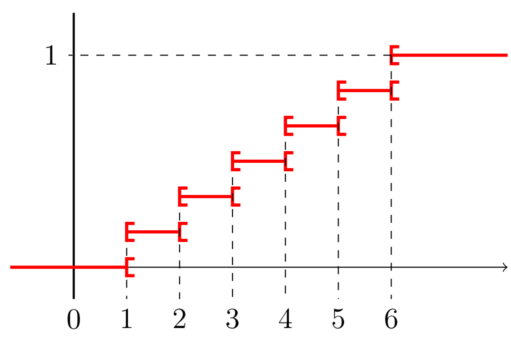
Définition (Fonction de répartition d'une variable aléatoire)
Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On définit la fonction :
$$F_X(x) : x \ \mapsto \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big).$$
Cette fonction est appelée *fonction de répartition* de la variable aléatoire X.

Exemple
On considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé équilibré à six faces. On pose X la variable aléatoire correspondant au résultat du dé.

- Pour tout $x < 1$, $[X \leqslant x] = \varnothing$. On a donc $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Pour tout $x \geqslant 6$, $[X \leqslant x] = \Omega$. On a donc $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Pour tout $1 \leqslant x < 2$, $[X \leqslant x] = [X = 1]$. On a donc $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{6}$.
- Pour tout $2 \leqslant x < 3$, $[X \leqslant x] = [X = 1] \cup [X = 2]$. On a donc $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{2}{6}$.

Ainsi de suite, on en déduit la fonction de répartition de la variable aléatoire X :

$$F_X \ : \ x \ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x \in [1, 2[, \\ \frac{2}{6} & \text{si } x \in [2, 3[, \\ \frac{3}{6} & \text{si } x \in [3, 4[, \\ \frac{4}{6} & \text{si } x \in [4, 5[, \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [5, 6[, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 6. \end{cases}$$



Proposition 10.
Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
2. *La fonction $x \mapsto F_X(x)$ est une fonction croissante.*
3. *La fonction $x \mapsto F_X(x)$ est continue à droite en tout point :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)$$
4. *La fonction $x \mapsto F(x)$ admet une limite à gauche en tout point :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$
5. *De plus,*
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

Preuve.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \in [0, 1]$ par définition de $\mathbb{P}$.
2. Soient x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Alors :
$$[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$$
Par croissante de $\mathbb{P}$, on obtient :
$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([X \leqslant y]) = F_X(y)$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction F_X est croissante sur $[x, +\infty[$ et minorée par 0.
Elle admet donc une limite à droite en x et :
$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right)$$
Or, comme $\left(\left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right)$$
Et enfin (par double inclusion ...), on a : $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right] = [X \leqslant x]$.
4. La fonction F_X est croissante sur $]-\infty, x]$ et majorée par 1.
Elle admet donc une limite à gauche en x et :
$$\lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)$$
Or, comme $\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)$$
Et enfin on peut montrer par double inclusion l'égalité : $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right] = [X < x]$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction F_X est croissante sur $]-\infty, x]$ et majorée par 1.
Elle admet donc une limite à gauche en x et :

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)$$

Or, comme $\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)$$

Et enfin on peut montrer par double inclusion l'égalité : $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right] = [X < x]$.

6. On démontre $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ (même idée pour l'autre propriété).
La fonction F_X est croissante et majorée par 1.
Elle admet donc une limite finie en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X \leqslant n])$$

Or, comme $([X \leqslant n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X \leqslant n]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]\right)$$

Il reste alors à démontrer que : $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \ = \ \Omega$.

($\subset$) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]$ est un événement donc $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \subset \Omega$.

($\supset$) Soit $\omega \in \Omega$. Notons $m = \lceil X(\omega) \rceil$.
Par définition, $X(\omega) \leqslant \lceil X(\omega) \rceil = m$.
Ainsi, $\omega \in [X \leqslant m] \subset \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]$.

□

Commentaire

Grâce au théorème de la limite monotone, on sait qu'une fonction de répartition admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de $\mathbb{R}$. En fait, toutes les fonctions de répartitions que l'on considérera seront continues par morceaux. Attention! Il existe cependant des variables aléatoires dont la fonction de répartition n'est pas continue par morceaux mais on n'en parlera pas.

Commentaire

Une variable aléatoire est toujours définie relativement à un espace probabilisé. Il en résulte que, si on change de probabilité, même si l'application X de Ω dans $\mathbb{R}$ reste inchangée, la fonction de répartition de X, quant à elle, sera modifiée. C'est le cas notamment lorsqu'on considère une probabilité conditionnelle.
Plus précisément, soit A un événement de probabilité non nulle, et soit $\mathbb{P}_A$ la probabilité conditionnelle à A. En notant X_A la variable aléatoire définie par l'application X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}_A)$, on obtient :

$$F_{X_A}(x) = \mathbb{P}\big([X_A \leqslant x]\big) = \mathbb{P}_A\big([X \leqslant x]\big) = \frac{\mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap A\big)}{\mathbb{P}(A)}$$

On parle dans ce cas de loi de X conditionnelle à A. La notation « $X|A$ », parfois rencontrée, est à bannir !

Définition (Loi d'une variable aléatoire)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire. On appelle *loi de la variable* X l'application $\mathbb{P}_X$ définie par :

$$\mathbb{P}_X : A \ \mapsto \ \mathbb{P}([X \in A])$$

où A est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 11.
Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors la fonction de répartition de X caractérise la loi de X. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]).$$

Commentaire

Dans la pratique, on utilisera la fonction de répartition pour déterminer la loi d'une variable aléatoire :

X et Y ont même fonction de répartition	$\Leftrightarrow$	X et Y ont même loi de probabilité

V. Variables aléatoires discrètes

V.1. Généralités

Définition (Variable aléatoire réelle discrète)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle *variable aléatoire réelle discrète* sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toute variable aléatoire X dont l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre peut être indexé par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$. Autrement dit, X est une variable aléatoire discrète s'il existe une suite de réels distincts $(x_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_k, \ k \in \mathbb{N}^*\}$$

ou bien si il existe un ensemble fini de réels distincts $\{x_1, \ldots, x_p\}$ tel que :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}.$$

Dans le premier cas, on parle de variable discrète infinie, et dans le second cas de variable discrète finie (ou juste variable finie).

⚠ Il existe des variables aléatoires infinies qui ne sont pas discrètes.

Commentaire

Pour certaines variables aléatoires discrètes, il peut être plus pratique d'indexer l'ensemble $X(\Omega)$ par $\mathbb{Z}$.

⚠ Il faut faire attention à ne pas confondre les deux notions suivantes.

- L'ensemble $X(\Omega)$ est indexé par $\mathbb{N}$.
  Autrement dit : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
- L'ensemble $X(\Omega)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  Par exemple, $X(\Omega) = \{3, 5, 7, 10, 11 \ldots\}$

Par exemple, si $X(\Omega) = \{1, \sqrt{2}, \mathrm{e}^6, 23\}$, alors :

× X est une v.a.r. discrète (puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini),

× $X(\Omega)$ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Proposition 12 (SCE associé à une v.a.r. discrète)**.**
Soit $(\Omega,_A)$ *un espace probabilisable. Soit* X *une v.a.r. discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$*.*
On note $X(\Omega) = \{x_i \ / \ i \in I\}$ *où* $I \subset \mathbb{N}$*.*
Alors la famille $([X = x_i])_{i \in I}$ *est un système complet d'événements, appelé* système complet d'événements associé à X.

Démonstration.
Il y a deux propriétés à démontrer.

1) $([X = x_i])_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

Soit $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ et soit $\omega \in [X = x_i] \cap [X = x_j]$.
Cela signifie que :

× $\omega \in [X = x_i]$ donc $X(\omega) = x_i$,

× $\omega \in [X = x_i]$ donc $X(\omega) = x_j$.

Par définition, $x_i \neq x_j$.
On en conclut qu'il n'existe pas d'élément $\omega \in [X = x_i] \cap [X = x_j]$.
Ainsi $[X = x_i] \cap [X = x_j] = \varnothing$.

2) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} [X = x_i]$:

($\supset$) $\bigcup\limits_{i \in I} [X = x_i] \subset \Omega$ puisque $\bigcup\limits_{i \in I} [X = x_i]$ est un événement (en tant qu'union dénombrable d'événements).

($\subset$) Soit $\omega \in \Omega$.
Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.
Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $X(\omega) = x_i$ *i.e.* $\omega \in [X = x_i]$.

$\square$

Proposition 13 (Loi d'une variable discrète infinie).
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* X *une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$*. Alors :*

- *On appelle* **loi de probabilité** *de* X *et on note* $\mathbb{P}_X$ *l'application :*

$$\mathbb{P}_X \;:\; \left| \begin{array}{lcll} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) & = \mathbb{P}([X = x]) \end{array} \right.$$

- *De plus, si les* x_i *forment une suite strictement croissante* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$*, alors*

$$\mathbb{P}([X = x_1]) = F_X(x_1), \quad et \;\; \forall k \geqslant 2, \; \mathbb{P}([X = x_k]) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Commentaire

Pour caractériser la loi d'une v.a.r. **discrète**, on explicitera :
× son ensemble image,
× les valeurs $\mathbb{P}([X = x_i])$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour une v.a.r. finie, on pourra donner un tableau de valeurs.

Par exemple, si on considère l'expérience aléatoire du jet d'un dé équilibré et qu'on définit la variable aléatoire X correspondant au résultat du dé. Alors, la loi de X est donnée par :
× $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$,
×

x_k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([X = x_k])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Commentaire

Dans la pratique, les x_i forment (presque) toujours une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \cdots$. Dans ce cas, la fonction de répartition est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Cependant, il existe des variables aléatoires discrètes pour lesquelles on ne peut pas ordonner l'ensemble $X(\Omega)$.

Commentaire

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète où l'on a indexé $X(\Omega)$ par $\mathbb{Z}$, *i.e.* $X(\Omega) = \{x_k, \; k \in \mathbb{Z}\}$, et telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k < x_{k+1}$, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \; \mathbb{P}([X = x_k]) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Application
On considère l'expérience suivante : on lance indéfiniment et de manière indépendante, un dé 6. On définit X la variable aléatoire correspondant au rang du premier 6. La v.a.r. X est discrète.
Déterminons sa loi :

- On détermine d'abord son support $X(\Omega)$.
  La v.a.r. X peut prendre toutes les valeurs dans $[\![1, +\infty[\![$.
  En effet, on peut obtenir le premier 6 au premier lancer ou ne jamais l'obtenir.
  D'où $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Déterminons les probabilités $\big(\mathbb{P}([X = n])\big)_{n \geqslant 1}$.
  Pour cela, posons l'événement :

$$\forall k \geqslant 1, \; S_k = \text{« le résultat du } k\text{-ième lancer est 6 »}$$

On a d'une part :

$$\mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}(S_1) = \frac{1}{6},$$

et d'autre part, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \mathbb{P}\left(S_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{S_i}\right) \\
&= \mathbb{P}(S_n) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{S_i}) \quad \textit{(par indépendance des } (S_k)_{k\geqslant 1}\textit{)} \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de X est caractérisée par le fait que :

- $X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$.
- Pour tout $n \geqslant 1$:
$$\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

On vérifie que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.

Théorème 2.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$).
Alors la fonction de répartition F_X est déterminée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} \mathbb{P}([X = x_i])$$

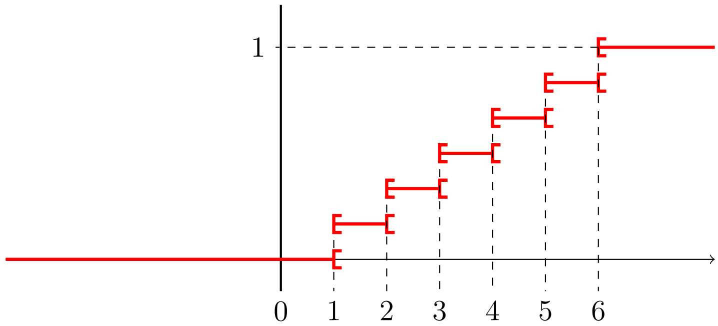
Preuve.
On remarque tout d'abord que : $[X \leqslant x] = \bigcup\limits_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} [X = x_i]$.

($\subset$) Soit $\omega \in [X \leqslant x]$. Alors $X(\omega) \leqslant x$.
Or $X(\omega)$ est un élément du support de X donc s'écrit sous la forme x_i pour un certain $i \in I$.

($\supset$) Soit $\omega \in \bigcup\limits_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} [X = x_i]$. Alors ω est un élément de l'un des événements $[X = x_i]$ avec $i \in I$ et $x_i \leqslant x$.
Ainsi, $X(\omega) = x_i \leqslant x$ et donc $\omega \in [X \leqslant x]$.

On a affaire à une union au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles. On obtient alors le résultat grâce à la σ-additivité de $\mathbb{P}$. $\square$

Exemple
On reprend l'exemple IV.La fonction de répartition de la v.a.r. X est donnée par le graphe suivant.



- On obtient une fonction constante par morceaux qui présente des sauts de discontinuité. Cette forme en escalier est **caractéristique** des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes.
- Les contremarches (*i.e.* les sauts de discontinuité) ont pour hauteur les valeurs successives de $\mathbb{P}([X = x_i])$ (les x_i étant rangés dans l'ordre).

Commentaire

Égalité très utile sur les v.a.r. à valeurs entières
Soit X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = I \subset \mathbb{N}$. Soit $i \in I$.
On remarque qu'on a l'égalité entre événements suivante :

$$[X > i - 1] = [X \geqslant i] = [X > i] \ \cup \ [X = i]$$

Les événements $[X > i]$ et $[X = i]$ sont incompatibles, donc en appliquant $\mathbb{P}$, on obtient : $\mathbb{P}([X > i-1]) = \mathbb{P}([X > i]) + \mathbb{P}([X = i])$ *i.e.*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X = i]) & = & \mathbb{P}([X > i-1]) - \mathbb{P}([X > i]) \\ & = & F_X(i) - F_X(i-1) \end{array}$$

(on retrouve que la loi de X est caractérisée de la même manière par les $(\mathbb{P}([X = i])_{i \in X(\Omega)}$ ou sa fonction de répartition)

Théorème 3.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1. *Si X est fini i.e. $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors :* $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$
2. *Si X est infini i.e. $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ alors :* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$
3. *On peut résumer ces propriétés en notant :* $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$

Preuve.
La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
Autrement dit, ces événements sont donc deux à deux incompatibles et vérifient : $\Omega = \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} [X = x]$.

En appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

(on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$: le caractère dénombrable de $X(\Omega)$ est donc indispensable ici) $\square$

Commentaire

On retrouve ici la propriété $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ qui est vérifiée pour toute v.a.r. (discrète ou non).

Proposition 14.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*
Soit X *une v.a.r. discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$ *telle que* $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ *(*$I \subseteq \mathbb{N}$*).*
Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ *une application.*
L'application $g(X)$ *vérifie les propriétés suivantes.*

1. $g(X)(\Omega) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.
2. $g(X)$ *est une v.a.r. discrète.*
3. $\forall y \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}([g(X) = y]) = \sum\limits_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}([X = x_i])$

Proposition 15.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et soient* X, Y *deux variables aléatoires discrètes.*
Alors λX, $X + Y$, XY, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ *sont aussi des variables aléatoires discrètes.*

Application
On considère l'expérience aléatoire du jet de deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire correspondant au résultat du premier dé et Y celui de second dé. Donner la loi des variables $Z_1 = X+Y$ et $Z_2 = \max(X, Y)$.

- Cas de Z_1 :
  - × On commence par déterminer $Z_1(\Omega)$.
    En étudiant toutes les valeurs possibles de Z_1, on trouve :
    $$Z_1(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$$
  - × On détermine $\mathbb{P}([Z_1 = x])$ pour tout $x \in Z_1(\Omega)$.
    Étudions en détails l'événement $[Z_1 = 4]$. On a l'égalité d'événements suivants :
    $$[Z_1 = 4] = ([X = 1] \cap [Y = 3]) \ \cup\ ([X = 2] \cap [Y = 2]) \ \cup\ ([X = 3] \cap [Y = 1])$$
    Les événements $[X = 1] \cap [Y = 3]$, $[X = 2] \cap [Y = 2]$ et $[X = 3] \cap [Y = 1]$ sont incompatibles, donc
    $$\begin{aligned}
    \mathbb{P}([Z_1 = 4]) &= \mathbb{P}\left(([X = 1] \cap [Y = 3]) \ \cup\ ([X = 2] \cap [Y = 2]) \ \cup\ ([X = 3] \cap [Y = 1])\right) \\
    &= \mathbb{P}\left([X = 1] \cap [Y = 3]\right) + \mathbb{P}\left([X = 2] \cap [Y = 2]\right) + \mathbb{P}\left([X = 3] \cap [Y = 1]\right) \\
    &= \mathbb{P}([X = 1])\ \mathbb{P}([Y = 3]) + \mathbb{P}([X = 2])\ \mathbb{P}([Y = 2]) + \mathbb{P}([X = 3])\ \mathbb{P}([Y = 1]) \quad \textit{(par indépendance des lancers)} \\
    &= \frac{3}{36}
    \end{aligned}$$
    En faisant de même pour toutes les valeurs de $Z_1(\Omega)$, on obtient :

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}([Z_1 = x_k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Commentaire

On aurait aussi pu déterminer la loi de Z_1 grâce à la formule des probabilités totales.

× $Z_1(\Omega) = [\![1, 12]\!]$.

× Soit $k \in [\![1, 12]\!]$.
La famille $([X = i])_{i \in [\![1,6]\!]}$ forme le système complet d'événements associé à X.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z = k]) & = & \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbb{P}([X = i] \cap [Z_1 = k]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbb{P}([X = i] \cap [X + Y = i]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k - i]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = k - i]) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{6} \dfrac{1}{6}\, \mathbb{P}([Y = k - i]) & \\ & = & \dfrac{1}{6} \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbb{P}([Y = k - i]) & \end{array}$$

On discute ensuite suivant la valeur de k pour obtenir le tableau précédent.

- Cas de Z_2 :
  × On commence par déterminer l'ensemble $Z_2(\Omega)$.
  En étudiant toutes les valeurs possibles de Z_2, on trouve :

$$Z_2(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$$

  × On détermine $\mathbb{P}([Z_2 = x])$ pour tout $x \in Z_2(\Omega)$.
  Étudions en détails l'événement $[Z_2 = 4]$. On a l'égalité d'événements suivants :

$$\begin{array}{rcl} [Z_2 = 4] & = & ([X = 4] \cap [Y = 1]) \ \cup \ ([X = 4] \cap [Y = 2]) \ \cup \ ([X = 4] \cap [Y = 3]) \\ & \cup & ([X = 3] \cap [Y = 4]) \ \cup \ ([X = 2] \cap [Y = 4]) \ \cup \ ([X = 1] \cap [Y = 4]) \\ & \cup & ([X = 4] \cap [Y = 4]) \end{array}$$

  Tous les événements du type $[X = x] \cap [Y = y]$ ci-dessus sont incompatibles. Les lancers sont toujours indépendants.
  Donc, avec le même type de calcul que pour Z_1, on obtient :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 4]) = \frac{7}{36}$$

  En faisant de même pour toutes les valeurs de $Z_2(\Omega)$, on obtient :

x_k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([Z_2 = x_k])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Commentaire

On pouvait aussi déterminer la loi de Z_2 en utilisant la méthode classique de détermination de la loi d'un maximum de v.a.r. .

- $Z_2(\Omega) \subset [\![1, 6]\!]$.
- Soit $k \in [\![1, 6]\!]$.
  Tout d'abord :
  $$[Z \leqslant k] \;=\; [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z \leqslant k]) &= \mathbb{P}([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant k]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant k]) && \textit{(car les v.a.r. X et Y sont indépendantes)} \\ &= \big(\mathbb{P}([X \leqslant k])\big)^2 && \textit{(car X et Y ont même loi)} \\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^2 && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])\textit{)} \end{aligned}$$
  De plus :
  $$\begin{aligned} [Z \leqslant k] &= [Z = k] \cup [Z < k] \\ &= [Z = k] \cup [Z \leqslant k-1] && \textit{(car Z est à valeurs entières)} \end{aligned}$$
  Comme $[Z = k]$ et $[Z \leqslant k-1]$ sont incompatibles, on obtient :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([Z \leqslant k]) - \mathbb{P}([Z \leqslant k-1]) \;=\; \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2 \\ &= \left(\frac{k}{6} - \frac{k-1}{6}\right)\left(\frac{k}{6} + \frac{k-1}{6}\right) \;=\; \frac{1}{6}\,\frac{2k-1}{6} \;=\; \frac{2k-1}{36} \end{aligned}$$

Application

On considère une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et telle que :
$$\forall k \geqslant 1,\; \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
Donner la loi des variables $Z_1 = X^2$, $Z_2 = (-1)^X$ et $Z_3 = \left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor$.

1. On vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

- Soit $k \geqslant 1$.
  $$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \frac{1}{k(k+1)} \;\geqslant\; 0$$
- Soit $n \geqslant 1$.
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$
  On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$.

La variable aléatoire X est donc bien définie.

2. Loi de Z_1

- $\times$ On commence par déterminer $Z_1(\Omega)$: $Z_1(\Omega) = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
- $\times$ Soit $n \in Z_1(\Omega)$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k^2$.
  Comme $k \geqslant 0$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$:
  $$\left[Z = k^2\right] \; = \; [X = k]$$
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([Z_1 = n]) \; = \; \mathbb{P}(\left[Z_1 = k^2\right]) \; = \; \mathbb{P}([X = k]) \; = \; \frac{1}{k(k+1)}$$

La loi de Z_1 est donc caractérisée par :

- $\triangleleft$ $Z_1(\Omega) = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.
- $\triangleleft$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z_1 = n]) = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$.

3. Loi de Z_2

- $\times$ On commence par déterminer $Z_2(\Omega)$: $Z_2(\Omega) = \{-1, 1\}$.
- $\times$ Tout d'abord :
  $$[Z_2 = 1] \; = \; [X \text{ est pair}] \; = \; \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = 2k]\,.$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) \; &= \; \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = 2k]\right) \\ &= \; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = 2k]) \qquad \textit{(par incompatibilité des événements } \big([X = 2k-1]\big)_{k \geqslant 1}\textit{)} \\ &= \; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} \end{aligned}$$
  De plus, la famille $([Z_2 = -1], [Z_2 = 1])$ est un système complet d'événements, donc :
  $$\mathbb{P}([Z_2 = -1]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1])$$

La loi de Z_2 est donc caractérisée par :

- $\triangleleft$ $Z_2(\Omega) = \{-1, 1\}$.
- $\triangleleft$ $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k+1)}$ et $\mathbb{P}([Z_2 = -1]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = -1])$.

4. Loi de Z_3

- $\times$ On commence par déterminer $Z_3(\Omega)$: $Z_2(\Omega) = \mathbb{N}$.
- $\times$ Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Tout d'abord :
  $$[Z_3 = k] \; = \; [X = 2k] \cup [X = 2k+1]$$
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([Z_3 = k]) \; = \; \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k+1])$$
  Deux cas se présentent alors :
  - si $k = 0$, alors :
  $$\mathbb{P}([Z_3 = k]) \; = \; \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) \; = \; 0 + \frac{1}{2}$$

- si $k \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z_3 = k]) &= \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k+1]) \\
&= \frac{1}{2k(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \\
&= \frac{1}{2k(k+1)}
\end{aligned}$$

La loi de Z_3 est donc caractérisée par :

◃ $Z_3(\Omega) = \mathbb{N}$

◃ Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([Z_3 = k]) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } k = 0 \\ \dfrac{1}{2k(k+1)} & \text{sinon} \end{cases}$

V.2. Moments d'une variable aléatoire discrète

À partir de maintenant, I désigne une partie de $\mathbb{N}$ qui vaut soit $\{1, \ldots, p\}$, soit $\mathbb{N}^*$.

Définition (Espérance)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète dont on note $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On dit que X admet une espérance si et seulement si la série :

$$\sum_{i \in I} x_i\ \mathbb{P}([X = x_i])$$

converge **absolument**. Dans ce cas, on note :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i\ \mathbb{P}([X = x_i]),$$

que l'on appelle *espérance de X*.

Commentaire

Une variable aléatoire **finie** admet **toujours** une espérance.
Par exemple, si on considère X une variable aléatoire correspondant au lancer d'un dé équilibré, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i\,\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{i=1}^{6} i \times \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7}{2}\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

On remarque que $\mathbb{E}(X)$ ne correspond pas forcément à une valeur que peut prendre la variable X mais correspond à une valeur moyenne de la variable.

Commentaire

Une variable aléatoire constante, *i.e.* $X(\Omega) = \{x\}$, admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = x$.

Certaines variables aléatoires n'admettent pas d'espérance !

Exemple
On considère une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et telle que :

$$\forall k \geqslant 1, \ \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

La variable aléatoire X n'admet pas d'espérance. En effet, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \, \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Or on sait que la série des harmoniques diverge. On en déduit que X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3
Soit X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
On rencontrera souvent aux concours une autre écriture de l'espérance *(que l'on fait redémontrer)* :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} i \ \mathbb{P}([X = i]) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > i]) - n \ \mathbb{P}([X > n])$$

Preuve.
Elle repose sur l'égalité entre événements suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ [X > i-1] = [X \geqslant i] = [X > i] \ \cup \ [X = i]$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Comme les événements $[X > i]$ et $[X = i]$ sont incompatibles, en appliquant $\mathbb{P}$, on a : $\mathbb{P}([X > i-1]) = \mathbb{P}([X > i]) + \mathbb{P}([X = i])$, *i.e.*

$$\mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([X > i-1]) - \mathbb{P}([X > i]) \qquad (*)$$

On obtient alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i \ \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}([X = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \ \left(\mathbb{P}([X > i-1]) - \mathbb{P}([X > i])\right) && \textit{(d'après la relation } (*)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}([X > i-1]) - \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}([X > i]) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \ \mathbb{P}([X > k]) - \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}([X > i]) && \textit{(changement d'indice } k = i-1\textit{)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \ \mathbb{P}([X > i]) - \sum_{i=1}^{n} i \ \mathbb{P}([X > i]) \\
&= \mathbb{P}([X > 0]) + \sum_{i=1}^{n-1} \ ((\cancel{i}+1) - \cancel{i}) \, \mathbb{P}([X > i]) - n \ \mathbb{P}([X > n]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > i]) - n \ \mathbb{P}([X > n])
\end{aligned}$$

$\square$

2. On suppose que la v.a.r. X possède une espérance.

a) On justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} i\mathbb{P}([X=i]) = 0$.

Preuve.
On sait que la v.a.r. X admet une espérance. Donc la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} i\ \mathbb{P}([X=i])$ converge absolument, donc converge.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on décompose la somme $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i])$ de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i]) = \sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([X=i]) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i])$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([X=i]) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i])$. Donc, par différence de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=n+1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i]) = 0$$

(on vient de redémontrer le résultat suivant : si une série converge, alors son reste de rang $n+1$ tend vers 0) □

b) On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ \mathbb{P}([X>n]) = 0$.

Preuve.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que :

$$[X>n] = [X \geqslant n+1] = \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [X=i]$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant n\ \mathbb{P}([X>n]) &= n\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} [X=i]\right) \\ &= n \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]) && \textit{(par incompatibilité des } ([X=i])_{i\in[\![n+1,+\infty[\![}\textit{)} \\ &= \sum_{i=n+1}^{+\infty} n\ \mathbb{P}([X=i]) \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i]) \end{aligned}$$

Revenons plus en détails sur la dernière inégalité. Soit $i \geqslant n+1$. Alors

$$n\ \mathbb{P}([X=i]) \leqslant (n+1)\ \mathbb{P}([X=i]) \leqslant i\ \mathbb{P}([X=i])$$

Or on sait que :

× $\sum\limits_{i \geqslant 0} n\ \mathbb{P}([X=i])$ et $\sum\limits_{i \geqslant 0} i\ \mathbb{P}([X=i])$ sont des séries à termes positifs.

× la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} i\ \mathbb{P}([X=i])$ converge.

Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{i \geqslant 0} n\ \mathbb{P}([X=i])$ converge. D'où la quantité $\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} n\ \mathbb{P}([X=i])$ existe et vérifie

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} n\ \mathbb{P}([X=i]) \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i])$$

De plus, d'après le point ***2.a)***, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}([X=i]) = 0$. Donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} n\ \mathbb{P}([X > n]) = 0$$

□

c) On en déduit que la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} \mathbb{P}([X > i])$ converge et qu'on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$$

Preuve.
D'après le point ***1.***, on sait que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > i]) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([X=i]) \quad + \quad n\ \mathbb{P}([X > n])$$

Or on sait que :

× la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([X=i])\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}(X)$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ \mathbb{P}([X > n]) = 0$, d'après la question ***2.b)***

Donc la série $\sum\limits_{i \geqslant 0} \mathbb{P}([X > i])$ converge et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$$

□

3. Réciproquement, on suppose que la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} \mathbb{P}([X > i])$ converge.

a) On commence par comparer les termes $\sum\limits_{i=0}^{n} i\mathbb{P}([X = i])$ et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$.

Preuve.
On précise que la somme $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$ existe bien par hypothèse du point ***3.***. De plus, d'après le point ***1.***, on a :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([X = i]) & = & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > i]) - n\ \mathbb{P}([X > n]) & \\ & \leqslant & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > i]) & \textit{(car } n\ \mathbb{P}([X > n]) \geqslant 0\textit{)} \\ & \leqslant & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i]) & \textit{(car : } \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > i]) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

□

b) On en déduit que X possède une espérance et qu'on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$$

Preuve.
La série $\sum\limits_{i\geqslant 0} i\ \mathbb{P}([X = i])$ est une série à termes positifs, donc la suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} i\ \mathbb{P}([X = i])$).
La suite (S_n) est donc :

× croissante

× majorée par $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$ d'après le point ***2.a)***

Elle est donc convergente. D'où la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} i\ \mathbb{P}([X = i])$ converge. Elle converge même absolument car

$$|i\ \mathbb{P}([X = i])| = i\ \mathbb{P}([X = i])$$

Donc X admet une espérance.
On peut maintenant utiliser le point ***2.*** et on en déduit que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > i])$$

□

Proposition 16 (Propriétés de l'espérance).
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux variables aléatoires discrètes admettant un espérance et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Linéarité : Les variables* $X + Y$ *et* λX *admettent aussi une espérance et :*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$$

2. *Positivité : Si* $\mathbb{P}([X \geqslant 0]) = 1$, *alors* $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. *Croissance : Si* $\mathbb{P}([X \geqslant Y]) = 1$, *alors* $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.
4. $\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}([X \geqslant 0]) = 1 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}([X = 0]) = 1$

Preuve.
Les 3 permiers points sont assez simples à démontrer en passant par la définition de l'espérance.
Intéressons nous au point *4.*.
Supposons que $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on a donc $x_i \geqslant 0$.
Soit $x_i > 0$. Alors nécessairement $\mathbb{P}[X = x_i] = 0$.
Si on suppose, par l'absurde, que cette probabilité est non nulle, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant x_i \, \mathbb{P}[X = x_i] > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi, pour tout i tel que $x_i \neq 0$, $\mathbb{P}[X = x_i] = 0$.
On a donc forcément $\mathbb{P}[X = 0] = 1$. □

Théorème 4 (Théorème de transfert).
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire discrète telle que* $X(\Omega) = \{x_k, \ k \in I\}$. *Soit* g *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Alors, la variable aléatoire* $g(X)$ *est une variable aléatoire discrète qui admet une espérance si et seulement si la série de terme général* $g(x_k)\mathbb{P}([X = x_k])$ *converge absolument et :*

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{k \in I} g(x_k) \; \mathbb{P}([X = x_k]).$$

Corollaire 2.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Alors, pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, *la variable* $aX + b$ *admet une espérance et :*

$$\mathbb{E}(a\,X + b) \;=\; a\,\mathbb{E}(X) + b.$$

Définition (Variable centrée)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire admettant une espérance. On dit que X est centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Commentaire

On peut toujours recentrer une variable aléatoire qui admet une espérance en lui retranchant celle-ci. Ainsi, la variable $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une variable centrée. En effet :

$$\mathbb{E}(Y) \;= E\big(X - \mathbb{E}(X)\big) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0.$$

Définition (Moment d'une variable aléatoire)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète et soit $p \geqslant 1$. On dit que X admet un moment d'ordre p si la variable X^p admet une espérance. De plus, on note

$$m_p(X) \ = \ \mathbb{E}(X^p),$$

le moment d'ordre p de la variable X.

Commentaire

Le moment d'ordre 1 n'est autre que l'espérance.

Commentaire

Une variable aléatoire finie admet des moments à tout ordre.

Proposition 17.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète et soit $p \geqslant q$ deux entiers. Si X admet un moment d'ordre p, alors X admet un moment d'ordre q.

Définition (Variance)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire admettant une espérance. On dit que X admet une variance si la variable $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance. De plus, la variance de X, notée $\mathbb{V}(X)$ est définie par :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big).$$

Commentaire

Par positivité de l'espérance, une variance est donc toujours positive. On peut ainsi définir l'écart-type d'une variable X admettant une variance par :

$$\sigma(X) \ = \ \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 18 (Formule de Koenig-Huygens)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrètes admettant une espérance. Alors, X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, et :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \ = \ m_2(X) - m_1(X)^2.$$

Preuve.

($\Rightarrow$) Supposons que X admet une variance.
On en déduit que X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admettent une espérance. Or :

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 \ = \ X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2$$

Donc : $X^2 \ = \ (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2\,\mathbb{E}(X)\,X - (\mathbb{E}(X))^2$.
La v.a.r. X^2 est la somme de v.a.r. discrètes qui admettent une espérance.
Elle admet donc une espérance.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si X admet un moment d'ordre 2, alors elle admet un moment d'ordre 1. Autrement dit, X admet une espérance.
L'égalité précédente démontre alors que $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance car est la somme de v.a.r. discrètes admettant une espérance.

Supposons maintenant que X admet une variance et démontrons la formule.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\,X) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}$$

□

Commentaire

- La variance étant toujours positive, cela nous permet d'en déduire : $\mathbb{E}(X^2) \geqslant \mathbb{E}(X)^2$.
- Si X est centrée, alors son moment d'ordre 2 correspond à sa variance.

Proposition 19 (Propriété de la variance)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrètes admettant une variance. Alors :

- *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une variance et :*

$$\mathbb{V}(aX + b) \;=\; a^2\, \mathbb{V}(X).$$

- *X est une variable aléatoire constante si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.*

Définition (Variable réduite)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire admettant une variance. On dit que la variable X est réduite si $\mathbb{V}(X) = 1$.

Définition (Variable centrée réduite)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire admettant une variance. On note X^* la variable centrée réduite associée à X définie par :

$$X^* \;=\; \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Preuve.
On vérifie que X^* est bien centrée et réduite.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^*) &= \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \frac{1}{\sigma(X)}\left(\cancel{\mathbb{E}(X)} - \cancel{\mathbb{E}(X)}\right) = 0 \\
\mathbb{V}(X^*) &= \mathbb{V}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2}\,\mathbb{V}(X - \mathbb{E}(X)) = \frac{1}{\mathbb{V}(X)} \times \mathbb{V}(X) = 1
\end{aligned}$$

□

Lois discrètes usuelles

On considérera toujours $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

VI. Lois finies usuelles

VI.1. Loi certaine

Définition (Loi certaine)

- On dit qu'une v.a.r. X suit *une loi certaine* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :
  a) $X(\Omega) = \{m\}$
  b) $\mathbb{P}([X = m]) = 1$
- On dira aussi que la v.a.r. X est *certaine*, égale à m.

On parle aussi de variable aléatoire constante, ou de variable déterministe.

> **Commentaire**
> On rappelle qu'une variable aléatoire est certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

> **Commentaire**
> **Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée**
> On considère une expérience qui possède une ou plusieurs issues différentes dont une issue se produit avec probabilité 1.
> Alors la v.a.r. X égale à m si l'issue particulière se produit suit une loi quasi-certaine.

Exemple
On considère des lancers successifs d'un dé à 6 faces non pipé.
On note X la v.a.r. correspondant à la somme des numéros obtenus sur la face visible du dé et sur sa face opposée.
Alors X est une v.a.r. certaine égale à 7.

Théorème 5.
Soit X une v.a.r. discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine).
Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}([X = m]) = 1$.

1. *Alors X admet une espérance et une variance.*
2. *De plus :* $\quad \mathbb{E}(X) = m \quad$ *et* $\quad \mathbb{V}(X) = 0$.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. discrète suivant une loi certaine.

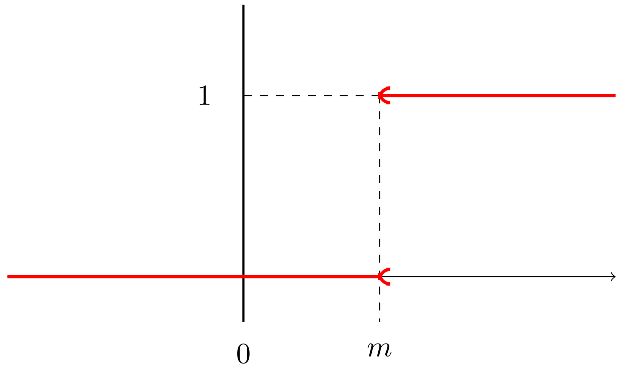
1. X admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
X^2 admet une espérance pour la même raison.
Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

2. • $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}([X = x]) = m \, \mathbb{P}([X = m]) = m \times 1 = m$

• $$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}([X = x]) \\ &= (\cancel{m} - \cancel{\mathbb{E}(X)})^2 \, \mathbb{P}([X = m]) = 0 \end{aligned}$$ □

Commentaire

Fonction de répartition
Si X est une v.a.r. discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine) telle que $\mathbb{P}([X = m]) = 1$.



VI.2. Loi de Bernoulli

Définition (Loi de Bernoulli)
Soit $p \in [0, 1]$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre p, notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si :

a) $X(\Omega) = \{0, 1\}$

b) $\mathbb{P}([X = 1]) = p$ (on en déduit que $\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p$).

Commentaire

Une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1$ ou $p = 0$ est une variable quasi-certaine.

Commentaire

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée
Toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles peut être appelée *expérience de Bernoulli*.
L'une des issues est appelée « succès », l'autre « échec ». Le paramètre p correspond à la probabilité de succès, $1 - p$ celle de l'échec.
Toute expérience de Bernoulli peut être traduite par une variable aléatoire de Bernoulli.
La v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit une $\mathcal{B}(p)$.

Exemple
On considère une pièce de monnaie donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$.
L'expérience consiste en 1 lancer de cette pièce de monnaie.
Ainsi : $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.
On note X la v.a.r. égale à 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face.

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{P}([X = 1]) = p$ et $\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p$.

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Commentaire

Il existe une variante de la loi de Bernoulli appelée loi de Rademacher.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Rademacher si :

× $X(\Omega) = \{-1, 1\}$

× $\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}([X = -1]) = \dfrac{1}{2}$

Si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, alors $2Y - 1$ suit la loi de Rademacher.

⚠ Une loi de Rademacher **n'est pas** un cas particulier de loi de Bernoulli !

Proposition 20.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Alors :

1. *X admet une espérance et une variance*
2. *De plus :* $\mathbb{E}(X) = p$ *et* $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.

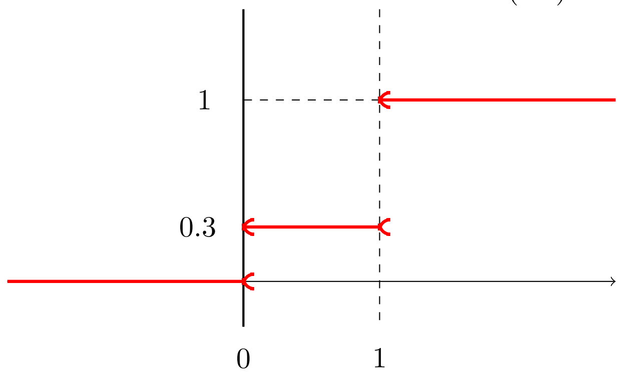
Preuve.

1. X admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.
2. De plus, on a :
$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) + 0 \times \mathbb{P}([X = 0]) = p,$$
Pour le moment d'ordre 2 :
$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \mathbb{P}([X = 1]) + 0^2 \times \mathbb{P}([X = 0]) = p,$$
donc, d'après la formule de Koenig-Huyghens,
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

□

Commentaire

Fonction de répartition
Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.7)$.



VI.3. Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)
Soit $p \in [0,1]$ et soit $n \geqslant 1$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi binomiale* de paramètres n, p, notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, si :

a) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$

b) $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Commentaire

On vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité grâce à la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X=k]) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ = \ (p+1-p)^n \ = \ 1.$$

Commentaire

Il est facile de voir que $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1,p)$.

Commentaire

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession de n épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1-p$.
- Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli identiques (*i.e.* de même paramètre p) et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres).

Alors la v.a.r. donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

Exemple
On lance successivement 10 fois un dé équilibré et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de six obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \dfrac{1}{6}\right)$.

Proposition 21.
Soient $n \geqslant 1$ et $p \in [0,1]$, et soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors :

1. *X admet une espérance et une variance.*

2. *De plus : $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.*

Preuve.

1. X admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.

2. On rappelle que pour tout $n \geqslant k \geqslant 1$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

- Calculons $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)} \\
&= np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j}(1-p)^{(n-1)-j} \\
&= np
\end{aligned}$$

- Calculons $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\times k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} nk\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)} \\
&= np\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j}p^{j}(1-p)^{(n-1)-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}p^{j}(1-p)^{(n-1)-j}\right) \\
&= np\big((n-1)p+1\big) \\
&= np(np+1-p) \\
&= n^2p^2+np(1-p)
\end{aligned}$$

D'après la formue de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 \;=\; n^2p^2+np(1-p)-(np)^2 \;=\; np(1-p).$$

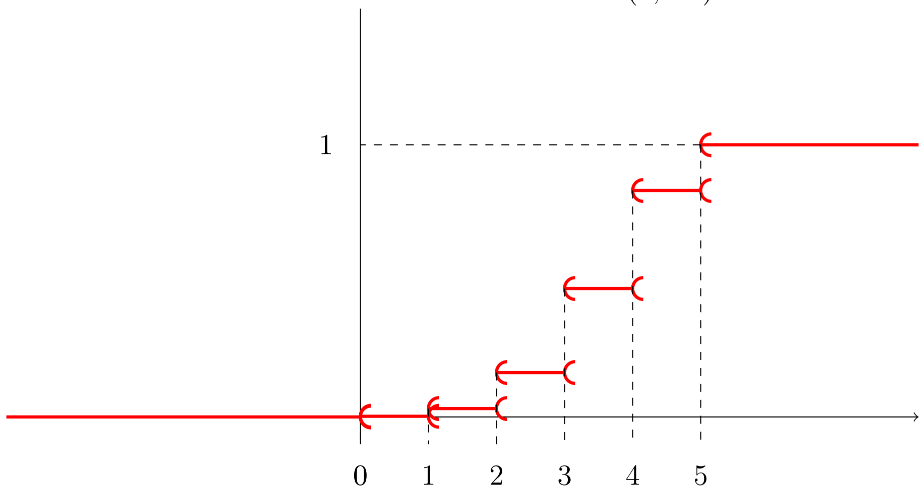
□

Commentaire

Pour se rappeler les formules de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale, on peut se dire qu'une expérience binomiale revient à sommer le résultat de n expérience de Bernoulli. Donc son espérance vaut n fois celle de la Bernoulli et sa variance vaut n fois celle de la Bernoulli.

Commentaire

Fonction de répartition
Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 0.7)$.



VI.4. Loi uniforme sur un ensemble fini

Définition (Loi uniforme sur un ensemble fini)

- Soit $n \geqslant 1$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, notée $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, si :

  a) $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$

  b) $\forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}$.

- Plus généralement, pour tous entiers $a < b$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, notée $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, si :

  a) $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$

  b) $\forall k \in [\![a, b]\!], \ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b - a + 1}$.

⚠ Card $[\![a, b]\!] = b - a + 1$.

Commentaire

Plus généralement, pour toute partie finie $I = \{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{N}$ (voire de $\mathbb{R}$), on peut définir la loi uniforme sur I par :

a) $X(\Omega) = I$

b) $\forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([X = x_k]) = \dfrac{1}{n}$.

Commentaire

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée
On considère une expérience qui possède n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.
Alors la v.a.r. X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience, suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Exemples

- Si on considère une variable aléatoire X correspondant au résultat d'un lancer de dé équilibré, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$.
- La loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ correspond à la loi uniforme sur $\llbracket 0,1 \rrbracket$.
- La loi de Rademacher correspond à la loi uniforme sur l'ensemble $\{-1,1\}$.

Proposition 22.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$. Alors :

1. *X admet une espérance et une variance.*

2. *De plus :* $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ *et* $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Preuve.

1. X admet une espérance et une variance car c'est une variable aléatoire finie.

2. • Pour le calcul de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

• Pour calculer la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}([X=k]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12} \\ &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.
Soient a et b deux entiers tels que $a < b$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$. Alors

1. *X admet une espérance et une variance.*

2. *De plus :* $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$ *et* $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a+2)(b-a)}{12}$.

Preuve.

1. X admet une espérance et une variance car c'est une v.a.r. finie.

2. On pose la variable aléatoire $Y = X - a + 1$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$ donc :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{b-a+2}{2}, \qquad \mathbb{V}(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} = \frac{(b-a+2)(b-a)}{12}.$$

Or par propriétés de l'espérance et de la variance :

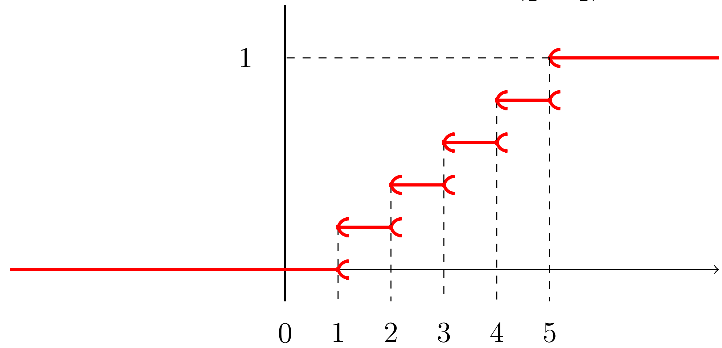
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y + a - 1) = \mathbb{E}(Y) + a - 1 = \frac{b-a+2+2a-2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y + a - 1) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(b-a+2)(b-a)}{12}.$$

□

Commentaire

Fonction de répartition
Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, 5]\!])$.



VII. Lois infinies usuelles

VII.1. Loi géométrique

Définition (Loi géométrique)
Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi géométrique* de paramètre p, notée $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

b) $\forall k \geqslant 1, \ \mathbb{P}([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$.

Commentaire

On vérifie qu'il s'agit bien là d'une loi de probabilité :
comme $p \in]0, 1[$, alors $(1-p) \in]0, 1[$, donc la série géométrique de terme général $(1-p)^k$ converge et pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{j=0}^{n-1} (1-p)^j \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} p \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Commentaire

Expérience aléatoire de référence et v.a.r. associée

- On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1 - p$.
- Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres).

Alors la v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

Exemple

On lance successivement un dé équilibrée jusqu'à obtenir un six. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du premier lancer tombé sur six. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

Proposition 23.

Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors

1. X admet une espérance et une variance

2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(x) = \frac{1-p}{p^2}$.

Preuve.

- Espérance :
  - × La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k\,\mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
  - × Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^{n} k\,(1-p)^{k-1}\,p \\ &= p \sum_{k=1}^{n} k\,(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

    Or la série géométrique dérivée $\sum\limits_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ de raison $(1-p) \in]-1,1[$ est convergente. Donc X admet une espérance.

  - × De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= p \sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1} \\ &= p\,\frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

- Variance :
  - × La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^2\,\mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

× On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N},\ k^2 = k(k-1)+k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cll} & \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}([X=k]) & \\ = & \sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} & (\textit{car } k^2 = k(k-1)+k) \\ = & p(1-p)\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum\limits_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} & \\ = & p(1-p)\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum\limits_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} & (\textit{car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0) \end{array}$$

Or la série géométrique dérivée $\sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée deuxième $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$, toutes deux de raison $(1-p) \in\ ]-1,1[$ sont convergentes.
Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une variance. De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X^2) & = & p(1-p)\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ & = & p(1-p)\dfrac{2}{(1-(1-p))^3} + p\dfrac{1}{(1-(1-p))^2} \\ & = & 2\,\dfrac{1-p}{p^2} + \dfrac{1}{p} \\ & = & \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{1}{p} \end{array}$$

× D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \ = \ \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \ = \ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \ = \ \frac{1-p}{p^2}$$

□

Proposition 24.
Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $(p \in\ ]0,1[)$.
Alors pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$:

1. $\mathbb{P}([X > k]) \ = \ q^k$, *où* $q = 1-p$
2. $\mathbb{P}([X > k+\ell]) \ = \ \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])$

Preuve.
Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

1. • On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\overline{[X > k]}) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs : $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]\right) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) \qquad\qquad \textit{(par incompatibilité)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p \ q^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \\ & = & p \ \dfrac{1 - q^k}{1 - q} \ = \ 1 - q^k \end{array}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k$.

2. D'après le point précédent :

$$\mathbb{P}([X > k + \ell]) \ = \ q^{k+\ell} \ = \ q^k \times q^\ell \ = \ \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])$$ □

Commentaire

Comme $[X > k + \ell] \subseteq [X > k]$, on a :

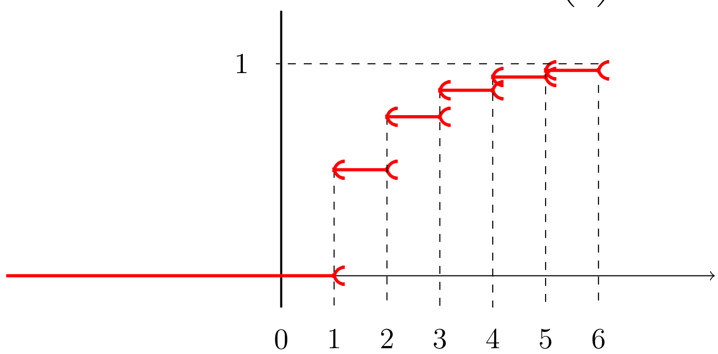
$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + \ell]) = \frac{\mathbb{P}([X > k + \ell])}{\mathbb{P}([X > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}([X > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique **est sans mémoire**.

Commentaire

Fonction de répartition

Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.



VII.2. Loi de Poisson

Définition (Loi de Poisson)
Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si :

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

b) $\forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Commentaire

On vérifie qu'il s'agit d'une loi de probabilité. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On reconnaît la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ qui est une série convergente. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$$

Commentaire

La loi de Poisson simule l'occurrence d'un événement rare au sein d'une très grande population.
Plus précisément :
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

- $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{n^k} = 1$
  En effet, le numérateur apparaît comme produit de k éléments qui sont tous équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à n.
- Notons $u_n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

  Et ainsi :
  $$\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n}\,\frac{-\lambda}{\cancel{n}} = -\lambda$$

  (c'est une instance de la propriété : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$*)*

  D'où : $\ln(u_n) \to -\lambda$ et $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Commentaire

- Enfin, comme $1 - \dfrac{\lambda}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$

On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Exemple

Par exemple, si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle. Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.

Proposition 25.

Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors :

1. *X admet une espérance et une variance*

2. *De plus : $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(x) = \lambda$.*

Preuve.

- Espérance :
  - × La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k\, \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
  - × Soit $n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \quad \left(\textit{car } \frac{k}{k!} = \frac{\cancel{k}}{\cancel{k} \times (k-1)!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!}
\end{aligned}$$

  Or la série exponentielle $\sum\limits_{j \geqslant 0} \dfrac{\lambda^j}{j!}$ est une série convergente.

  On en déduit que X admet une espérance.
  - × De plus :

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} \lambda \times \cancel{\mathrm{e}^{\lambda}} = \lambda$$

- Variance :
  - × La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^2\, \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.

× On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1)+k$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}([X=k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} && \textit{(car } k^2 = k(k-1)+k\textit{)} \\
= \ & \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right) && \textit{(car les premiers termes de ces sommes sont nuls)} \\
= \ & \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) \\
= \ & \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Or la série exponentielle $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ est une série convergente.
On en déduit que X admet un moment d'ordre 2, donc une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\,\mathbb{P}([X=k]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda}\right) = \lambda^2 + \lambda$$

× Enfin d'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

□

Commentaire

Fonction de répartition
Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$.