Matrices

I. Définitions des matrices

Définition (Matrice)
On appelle *matrice à n lignes et p colonnes* tout tableau de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels appelés *coefficients* ou *entrées* de la matrice. On pourra écrire la matrice précédente $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.
L'ensemble des *matrices à n lignes et p colonnes* est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque Lorsque $p = n$, on parlera de *matrice carré* et l'on notera l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Lorsque $p = 1$ (resp. $n = 1$) on parlera de *matrice colonne* (resp. *matrice ligne*).

Exemples

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

Définition (Matrice nulle)
On appelle *matrice nulle* à n lignes et p colonnes la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0. Cette matrice est notée $0_{n,p}$.

Définition (Matrice triangulaire)

- On appelle *matrice triangulaire supérieure* toute matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que pour tout $i > j$, $a_{i,j} = 0$. La matrice A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On appelle *matrice triangulaire inférieure* toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que pour tout $i < j$, $a_{i,j} = 0$. La matrice A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
- On appelle *matrice diagonale* toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ telle que pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$. La matrice A est de la forme
$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Définition (Transposée)
Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *matrice transposée* de A, notée ${}^tA$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par
$${}^tA ={}^t \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \;=\; \big(a_{j,i}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

Exemples
$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque On vérifie aisément que ${}^t({}^tA) = A$.

Remarque La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure (et réciproquement).

Définition (Matrice symétrique)
On appelle *matrice symétrique*, toute matrice A vérifiant ${}^tA = A$.

Remarque
- Une matrice symétrique est nécessairement une matrice carré.
- Une matrice diagonale est un cas particulier de matrice symétrique.

II. Calcul matriciel

II.1. Multiplication d'une matrice par un réel

Définition
Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note
$$\lambda \cdot \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \;=\; \big(\lambda a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Exemple 1
$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.
On a les règles élémentaires de calculs suivantes :
- *Pour toute matrice A et tout réel λ, μ : $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$,*
- *Pour toute matrice A et tout réel λ : $\lambda {}^tA = {}^t(\lambda A)$,*
- *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $0 \cdot A = 0_{n,p}$,*
- *Pour tout réel λ : $\lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$.*

II.2. Addition de deux matrices

Définition
Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \big(b_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note

$$A + B = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} + \big(b_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \big(a_{i,j} + b_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}},$$

la *somme* des matrices A et B.

Remarque Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut définir leur soustraction $A - B$ comme étant égale à $A + (-1) \cdot B$. On dira que la matrice $-B$ est *l'opposée* de la matrice B.

⚠ Tout comme il n'est pas possible d'additionner un réel et un vecteur, l'addition n'est pas possible qu'entre deux matrices de même taille, c'est-à-dire ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ n'est pas définie.}$$

Proposition 2.
On a de même les règles élémentaires de calculs suivantes : Pour toutes matrices A, B et C de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- *$A + B = B + A$,*
- *${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$,*
- *$(A + B) + C = A + (B + C)$,*
- *$A + 0_{n,p} = A$.*

De plus, on peut vérifier que la définition de l'addition de matrices est en accord avec celle de la multiplication par un réel : Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tous réels λ, μ
- *$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,*
- *$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,*

Exercice 1

1. On définit une suite de matrices (A_n) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{n+1} = A_n + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A_1, A_2, exprimer A_n en fonction de n.

2. On définit une suite de matrices (B_n) dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B_{n+1} = \frac{1}{3}B_n + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer B_1, B_2 puis exprimer B_n en fonction de n. *On pourra étudier la suite $C_n = B_n - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

II.3. Multiplication de deux matrices

Définition
Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et toute matrice $B = \big(b_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit la matrice AB, *produit* entre A et B, comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par

$$AB = \Big(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}).$$

Le produit entre deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B et le résultat est une matrice ayant le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

Exemple 2

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 8 & 1 & -1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\times 2+(-1)\times 8 & 1\times 0+(-1)\times 1 & 1\times(-1)+(-1)\times(-1)\\ 4\times 2+0\times 8 & 4\times 0+0\times 1 & 4\times(-1)+0\times(-1)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-6 & -1 & 0\\ 8 & 0 & -4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Remarque Dans le cas particulier du produit entre une matrice ligne à n colonnes $A = \big(a_1 \cdots a_n\big)$ et une matrice colonne à n lignes $B = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, on a

$$AB = \big(a_1 \cdots a_n\big)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k.$$

Définition (Matrice identité)
On appelle *matrice identité* de taille n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres égaux à 0. Cette matrice est notée I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Proposition 3.

- *Pour toutes* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$
$$A(BC) = (AB)C.$$
- *Pour toutes* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$
- *Pour toutes* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$
$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (B+C)D = BD + CD.$$

- *Pour toutes* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$^{t}(AB) = ^{t}B^{t}A.$$

- *Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$AI_n = I_m A = A.$$

Remarque Le dernier point nous dit que la matrice identité est *neutre* pour la multiplication : c'est-à-dire que multiplier par la matrice identité n'influence pas le résultat (tout comme ajouter la matrice nulle).

⚠ Même si toutes les règles de calculs ressemblent à celles du produit classique entre deux réels, il y a deux grandes différences importantes.

1. Premièrement, on n'a pas, en général, $AB = BA$, d'une part parce que même si le produit AB est défini, rien n'assure que le produit BA le soit et d'autre part même si les deux produits sont définis, on trouve rapidement des contre-exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Deuxièmement, on peut avoir un produit entre $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $AB = 0_{m,p}$ sans que pour autant $A = 0_{m,n}$ ou $B = 0_{n,p}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition (Puissance k-ième)
Pour tout entier $k \geqslant 0$ et toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *puissance k-ième de A*, notée A^k, la matrice

$$A^0 = I_n, \quad k \geqslant 1, \ A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

⚠ Comme on sait que toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne vérifient pas nécessairement $AB = BA$, on perd certaines identités algébriques comme

$$\text{pour tout } k \geqslant 2, \ (A+B)^k \neq \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}, \quad (AB)^k \neq A^k B^k.$$

Définition (Inversibilité, inverse)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B, lorsqu'elle existe, est unique et est appelée *inverse de A* et est notée A^{-1}.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $GL_n(\mathbb{R})$.

Preuve.
Supposons qu'il existe B et B' deux matrices telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$. Alors, on a d'une part

$$BAB' = (BA)B' = I_n B' = B'$$

d'autre part

$$BAB' = B(AB') = BI_n = B.$$

On en conclut que $B = B'$. □

Exemples

- La matrice indentité I_n est une matrice inversible et est son propre inverse puisque

$$I_n \cdot I_n = I_n.$$

- Plus généralement, toute matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

dont les coefficients diagonaux (d_i) sont tous non nuls est inversible et admet pour inverse

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

- La matrice nulle 0_n n'est pas inversible.

Proposition 4.
Soit A et B deux matrices inversibles et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors

- $(AB)^{-1} \;=\; B^{-1}A^{-1}$,
- $(\lambda A)^{-1} \;=\; \frac{1}{\lambda}A^{-1}$,
- ${}^t(A^{-1}) \;=\; ({}^tA)^{-1}$.

De plus, si A est inversible, alors pour toutes matrices B et C

$$AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$$

et

$$BA = CA \;\Rightarrow\; B = C.$$

Remarque La dernière propriété revient à dire qu'une matrice inversible peut se « simplifier » à gauche ou à droite.

Exercice 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel qu'il existe une matrice B non nulle tel que $AB = 0_n$. Montrer alors que la matrice A n'est pas inversible. (On pourra supposer par l'absurde que la matrice A est inversible).

Proposition 5.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Preuve.
On vérifie sans peine que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Supposons maintenant que $ad - bc$. Premier cas, A est la matrice nulle (donc n'est pas inversible). Second cas, A n'est pas nulle, donc la matrice

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

n'est pas nulle non plus et on vérifie que $AB = 0_2$. On en déduit que A n'est pas inversible (*cf.* Exercice 2). □

Exercice 3
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer, lorsque c'est possible, les expressions suivantes : $AB,\ BA,\ A^tB,\ {}^tAA + B,\ A^tA - B$.

Exercice 4
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2 , B^2, $A - B$ et $A + B$ puis calculer $A^2 - B^2$ et $(A - B)(A + B)$. Commenter.

Exercice 5
Calculer la puissance k-ième des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6
On définit la suite (A_n) suivante : $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = A_n \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer A_1, A_2, A_3 et conjecturer la forme de A_n pour tout n. Montrer par récurrence la conjecture.

Exercice 7
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

III. Matrice d'un système linéaire

Définition (Matrice associée à un système)
Soit (S) un système linéaire d'équation à n équations et à p inconnues

$$(S)\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{cases}.$$

On appelle *matrice associée au système* la matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On dit que la *forme matricielle du système* (S) est $AX = B$ avec $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Remarque Lorsque que la matrice associée au système est triangulaire supérieure, le système est échelonné.

Exemple 3
Le système suivant

$$\begin{cases} x+3y-z &= 1 \\ -2x-2y+z &= 0 \\ x \qquad -2z &= 3 \end{cases}$$

admet comme forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

⚠ Pour extraire la matrice associée à un système donné, on fera attention à ce que les variables soient dans le bon ordre et les constantes du côté droit. En effet, la forme matricielle du système

$$\begin{cases} x+3y+z &= 1 \\ z-2y+3 &= 1 \\ x-2z+y &= 2 \end{cases}$$

n'est pas $\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ mais plutôt $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

IV. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée : méthode de Gauss-Jordan

On connait déjà une formule pour obtenir l'inverse, lorsqu'elle existe, d'une matrice carrée de taille deux. Cette formule peut se généraliser pour une taille quelconque mais devient très compliqué et n'est pas au programme du cours d'ECE. Nous allons adopter une approche en lien avec les systèmes linéaires. En adaptant l'agorithme du pivot de Gauss, on peut calculer l'inverse d'une matrice : c'est ce que l'on appelle la méthode de Gauss-Jordan.

Proposition 6.
Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues ayant pour forme matricielle $AX = Y$ et tel que la matrice A soit inversible. Alors, le système admet une unique solution $X = A^{-1}Y$.

Preuve.
Si A est inversible, alors $AX = Y \;\Rightarrow\; X = A^{-1}Y$ (en multipliant à gauche par A^{-1}). □

Remarque Cette proposition nous permet de dire que si la matrice A associée au système (S) est inversible, alors le système est de Cramer et donc le pivot de Gauss engendre n pivots non nuls. On va se servir de ça pour calculer explicitement A^{-1}. En effet, en partant du principe que

$$A \cdot X \;=\; I_n \cdot Y \;\Leftrightarrow\; I_n \cdot X \;=\; A^{-1} \cdot Y,$$

l'idée est de dire que la succession d'opérations élémentaires nécessaires pour passer de la matrice A à I_n, nous permet aussi de passer de la matrice I_n à A^{-1}.

<u>Méthode de Gauss-Jordan</u> : La méthode reprend le principe du pivot de Gauss, à l'exception que l'on "enregistre" chaque opération au fur et à mesure en agissant sur la matrice identité. Première étape, on se ramène à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficient diagonaux, les pivots, sont égaux à 1. Seconde étape, on cherche à se ramener à l'identité en neutralisant toutes les entrées au dessus des pivots avec des opérations du type $L_j \leftarrow L_j - a_{j,i}L_i$ et en commençant par la dernière colonne. Pour mieux comprendre, nous allons le faire sur un exemple.

Exemple 4 On souhaite inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. On commence par écrire la matrice côte à côte avec la matrice identité.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque opération sera effectuer sur la matrice de gauche mais aussi sur la matrice de droite.

On commence par les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{3}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on effectue l'opération $L_2 \leftarrow 2L_2$ pour se débarrasser des fractions.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On continue par $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{2}{5} L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ \dfrac{11}{5} & -\dfrac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

puis $L_3 \leftarrow 5L_3$ (toujours pour revenir à des valeurs entières).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice de gauche est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible.

Maintenant, on se débarrasse des coefficients non nuls au dessus de la diagonale. Pour cela, on commence par la dernière colonne. On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -25 & 10 & -10 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

puis on effectue sur la deuxième colonne par $L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{5} L_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -25 & 10 & -10 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Enfin on termine en faisant apparaître la matrice identité à gauche avec les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{5}L_2 \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix} \right.$$

On en déduit que la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \\ 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Grâce à la méthode de Gauss-Jordan, on a la proposition suivante.

Proposition 7.
Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues ayant pour matrice associée A. Alors (S) est un système de Cramer si et seulement si A est inversible.

Définition (Système linéaire avec second membre à paramètres)
On appelle *système linéaire avec second membre à paramètres* tout système linéaire d'équations dont le second membre est constitué de paramètres. Dans ce cas, les solutions du système s'expriment en fonction des paramètres.

Exemple 5

Pour le système suivant $\begin{cases} x + y + z = a \\ \quad\ \ y - z = b \\ \quad\ \ y + z = c \end{cases}$, on a comme solution $\begin{cases} x = a - c \\ y = \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} \\ z = -\dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} \end{cases}$

Théorème 1.
Soit (S) un système linéaire de Cramer à n équations et n inconnues avec second membre à paramètres

$$(S) \ : \ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

où les $y_1, \ldots, y_n$ sont des paramètres. On suppose que les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ de (S) s'exprime en fonction des $y_1, \ldots, y_n$ de la manière suivante

$$\begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ x_2 = b_{2,1}y_1 + b_{2,2}y_2 + \cdots + b_{2,n}y_n \\ \quad\ \vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases}$$

Alors, la matrice A associée au système (S) admet pour inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

On passe d'un système à inconnues $x_1, \dots, x_n$ et à paramètres $y_1, \dots, y_n$ à un système à inconnues $y_1 \dots, y_n$ et à paramètres $x_1, \dots, x_n$. On dit que l'on inverse le système.

Remarque Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à un système avec second membre à paramètre revient exactement à calculer A^{-1} avec la méthode de Gauss-Jordan.

Exemple 6

Soit A la matrice égale à $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour calculer son inverse, on considère le système à paramètre (a,b,c) suivant (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & - & y & - & z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & - & y & - & z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & - & y & - & z & = & b \\ & - & y & & & = & -a + c \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & + & z & = & -b \\ & - & y & & & = & -a + c \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & + & z & = & -b \\ & & & & z & = & -a - b + c \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 2a + b - c \\ & & y & = & a - c \\ & & z & = & -a - b + c \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a + b + 2c \\ y & = & a - c \\ z & = & -a - b + c \end{array}\right.$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque De part l'unicité de l'inverse d'une matrice, tous les moyens sont bons pour inverser le système. Dans des cas simples, on pourra se passer du pivot de Gauss ou de la méthode de Gauss-Jordan et inverser plus rapidement, en particulier lorsque la matrice possède beaucoup de 0.

Exemple 7

Pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on pose le système à paramètres

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 3z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ -2x & + & y & & & = & c \end{array}\right.$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & & & + & 3z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ -2x & + & y & & & = & c \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & & & & & = & a & - & 3b & & \\ x & & & + & z & = & & & b & & \\ -2x & + & y & & & = & & & & & c \end{array}\right.$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcrcrcr} x & & & = & a & - & 3b & & \\ & & z & = & -a & + & 4b & & \\ & y & & = & 2a & - & 6b & + & c \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrcrcr} x & & & = & a & - & 3b & & \\ & y & & = & 2a & - & 6b & + & c \\ & & z & = & -a & + & 4b & & \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, une proposition immédiate et très utile qui donne un dernier critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires.

Proposition 8.
Une matrice carrée triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si tous ces coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Preuve.
Cette matrice a donc n pivots non nuls. D'après la méthode de Gauss-Jordan, cela revient à dire que la matrice est inversible. $\square$