Intégration

I. Rappels sur l'intégrale

Définition (Primitive)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de f sur I* toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. F est dérivable sur I

2. $F' = f$

Théorème 1.
Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Théorème 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Soit F une primitive de f sur I.

1. *G est une primitive de f sur I $\Leftrightarrow$ Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ G(x) \ = \ F(x) + \lambda$*
(on en déduit notamment que f admet une infinité de primitives sur I)

2. *Soit $c \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c.*
C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.

Définition (Intégrale)
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soit F une primitive de f sur I.
Soit $(a, b) \in I^2$.
On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ la quantité :

$$\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \big[\ F(t)\ \big]_a^b \ = \ F(b) - F(a)$$

Commentaire

Dans l'expression $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$, x est une variable muette.

Proposition 1. (Linéarité de l'intégrale)
Soit I un intervalle, $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

Proposition 2. (Positivité de l'intégrale)
Soient $a \leqslant b$ deux réels et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est positive, i.e. si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0$, alors

$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0.$$

Preuve.
La fonction f est continue. Donc il existe une primitive F de f, c'est-à-dire $\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x)$. Comme f est positive sur l'intervalle $[a,b]$, alors la fonction F est croissante sur cet intervalle. On a donc $F(a) \leqslant F(b)$. Or, on rappelle que

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$. □

Théorème 3.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *sur un intervalle I et $c \in I$.*

La fonction $\begin{array}{rccl} H & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array}$ *est la primitive de f sur I qui s'annule en c.*

1) *En particulier, cette fonction H est de classe C^1 et de dérivée f.*
Ce que l'on pourra noter (avec abus de notation) :

$$\left(\int_c^x f(t)\ dt\right)' = f(x)$$

2) *Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J, alors les fonctions*

$$H_1 : x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad H_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt, \quad H_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur J.
Les dérivées de ces fonctions sont (avec l'abus de notation précédent) :

$$\left(\int_c^{v(x)} f(t)\ dt\right)' = v'(x) f(v(x)) \qquad \left(\int_{u(x)}^{c} f(t)\ dt\right)' = -u'(x) f(u(x))$$

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt\right)' = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

MÉTHODO

Pour étudier une intégrale fonction de ces bornes $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$, où f est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I, on suivra le schéma suivant.

1) On introduit une primitive F de f : « La fonction f est continue (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I, donc elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. de classe $\mathcal{C}^2$) sur I. »

2) On exprime G en fonction de F :

$$\forall x \in J,\ G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$$

3) On justifie la dérivabilité de G.
La fonction G est dérivable sur J car la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable) sur I et les fonctions u et v sont dérivables sur J.

4) Enfin on dérive G grâce à la formule de dérivation d'une composée :

$$\forall x \in J,\ G'(x) = v'(x)\, F'(v(x)) - u'(x)\, F'(u(x)) = v'(x)\, f(v(x)) - u'(x)\, f(u(x))$$

Commentaire

Primitives classiques

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}^{-*}$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

Commentaire

Il ne faut pas confondre x^α (avec $\alpha \neq -1$) et a^x (avec $a > 0$) :
- × pour tout $x > 0$: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$.
- × pour tout $x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}$.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\times$ u dérivable sur I. $\times$ $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\times$ u dérivable sur I. $\times$ $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\lvert u(x)\rvert) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	$\times$ u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

Commentaire

- Il faut penser à la forme $x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ dès que la fonction à intégrer contient une puissance. Par exemple :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\ dt &= \int_0^1 \frac{t}{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}\ dt = \int_0^1 t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2t\,(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}\ dt = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Cette primitive classique est parfois présentée sous la forme suivante :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{(u(x))^\beta}$ (avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)	$\times$ u dérivable sur I. $\times$ $u > 0$ sur I.	$x \mapsto -\dfrac{1}{\beta-1}\,\dfrac{1}{(u(x))^{\beta-1}} + \lambda$

(il faut notamment connaître les primitives de $\dfrac{u'}{u^2}$ *et de* $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$*)*

II. Extension de la notion d'intégrale

Définition (Intégrale impropre)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi-ouvert** $[a,b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est *impropre* (ou *généralisé*) en b.
On définit de même, pour une fonction continue sur l'intervalle $]a,b]$, l'intégrale *impropre* en a.

Commentaire

L'étude d'une intégrale impropre commence par l'étude de la continuité de l'intégrande pour trouver les points où l'intégrale est impropre.

Proposition 3.
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ telle que f admet une limite finie en b (f est prolongeable par continuité en b).
Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est faussement impropre *en b.*

II.1. Sur un intervalle du type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$

Définition (Intégrale convergente et divergente)

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi- ouvert** $[a,+\infty[$.
  - × On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est *convergente* lorsque la fonction

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array} \right.$$

admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt$$

  - × Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente.*
- Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi- ouvert** $]-\infty,b]$.
  - × On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt$ est *convergente* lorsque la fonction

$$F : \left| \begin{array}{ccc}]-\infty,b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \end{array} \right.$$

admet une limite finie quand x tend vers $-\infty$, et dans ce cas, on a :

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\ dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\ dt$$

  - × Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente.*

Étudier la *nature* d'une intégrale impropre revient à déterminer sa convergence ou sa divergence.

MÉTHODO

Étude de l'objet $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$. où f est continue sur $[a,+\infty[$.

1. On rappelle que f est continue sur $[a,+\infty[$.

2. On introduit $A \in [a,+\infty[$ et on étudie si l'intégrale sur le segment $[a,A]$: $F(A) = \displaystyle\int_a^A f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$.
(comme f est continue sur $[a,+\infty[$, f est aussi continue sur $[a,A]$)

3. Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exercice 1

a) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$?

b) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$?

Preuve.

a) ***1.*** La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt = \left[-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t} \right]_0^A = -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha A} + \frac{1}{\alpha} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$$

3. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.

b) ***1.*** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

2. Soit $A \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{1}{t}\ dt = [\ \ln(|t|)\ ]_1^x = \ln(x) - \cancel{\ln(1)} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3. On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ diverge.

□

II.2. Sur un intervalle du type $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition (Intégrale convergente et divergente)

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi- ouvert** $[a,b[$.
  - × On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est *convergente* lorsque la fonction

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [a,b[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array} \right.$$

admet une limite finie quand x tend vers b^-, et dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ dt$$

× Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi- ouvert** $]a, b]$.

  × On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est *convergente* lorsque la fonction

$$F \ : \left| \begin{array}{ccc}]a, b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \end{array} \right.$$

  admet une limite finie quand x tend vers a^+, et dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\ dt$$

  × Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est *divergente*.

MÉTHODO

Étude de l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ où f est continue sur $[a, b[$.

1. On rappelle que f est continue sur $[a, b[$.

2. On introduit $A \in [a, b[$ et on étudie si l'intégrale sur le segment $[a, A]$: $F(A) = \displaystyle\int_a^A f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque $A \to b$.
(comme f est continue sur $[a, b[$, f est aussi continue sur $[a, A]$)

3. Si c'est le cas, on conclut que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.
Dans le cas contraire, cette intégrale impropre est divergente.

Exercice 2
Quelle est la nature des intégrales suivantes ?

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\ dt$ ***c)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\ dx$

Preuve.

a) ***1)*** La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$.

2) Soit $a \in\ ]0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_a^1 \ln(t)\ dt &= [\ t\ \ln(t)\ ]_a^1 - \int_a^1 1\ dt \\ &= -a\ \ln(a) - (1-a) \ = \ a - a\ \ln(a) - 1 \underset{a\to 0}{\longrightarrow} -1\end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ est donc convergente et vaut -1.

b) ***1)*** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$.

2) Soit $a \in\ ]0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{1}{t}\ dt &= [\ \ln(|t|)\ ]_a^1 \\ &= \cancel{\ln(1)} - \ln(a) \ = \ -\ln(a) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ est donc divergente.

c) ***1)*** La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$.

2) Soit $a \in\ ]0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}\ dx &= \left[\ \frac{1}{2}\,(\ln(t))^2\ \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{2}\cancel{(\ln(1))^2} - \frac{1}{2}(\ln(a))^2 \ = \ -\frac{1}{2}(\ln(a))^2 \underset{a\to 0}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

3) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\ dx$ est donc divergente.

□

II.3. Sur un intervalle du type $]a,b[$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

Définition (Intégrale convergente)
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.
Alors on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ **converge** lorsqu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\ dt$ sont toutes deux convergentes.
Si c'est le cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est donnée par :

$$\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_a^c f(t)\ dt \ + \ \int_c^b f(t)\ dt$$

Dans le cas contraire, *i.e.* si l'une des intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ ou $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ diverge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **diverge**.

Exemple

Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt$.

1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

2) • Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt$.

(i) La fonction f est continue sur $]0,1]$.

(ii) Soit $a \in\,]0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt &= -\int_a^1 \frac{-1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,dt = -\left[\ \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ \right]_a^1 \\ &= -(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\sqrt{a}}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{a}} - \frac{1}{\mathrm{e}} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

(iii) On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt$ est convergente et vaut $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

• Étudions maintenant la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt$.

(i) La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$.

(ii) Soit $A \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^A \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt = -\left[\ \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\ \right]_1^A = -(\mathrm{e}^{-\sqrt{A}} - \mathrm{e}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{A}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

(iii) On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,dt = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) + \frac{1}{\mathrm{e}} = 1$$

II.4. Utilisation de la parité

Théorème 4.
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Soit f *une fonction continue sur l'intervalle ouvert* $]-a, a[$.

- *Si la fonction* f *est* paire, *alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ *converge ssi l'intégrale* $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\ dt$ *converge et dans ce cas, on a :*
$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\ dt$$
- *Si la fonction* f *est* impaire, *alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt$ *converge ssi l'intégrale* $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\ dt$ *converge et dans ce cas, on a :*
$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0$$

Preuve.
Par définition :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\ dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(t)\ dt \text{ et } \int_{0}^{a} f(t)\ dt \text{ convergent}$$

- Supposons f paire.

($\Rightarrow$) Évident par définition.

($\Leftarrow$) On considère $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ dt$ et on effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad (\text{donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -a \ \Rightarrow\ u = -(-a) = a \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = -0 = 0 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{a}^{0} -f(-u)\ du \ = \ \int_{a}^{0} -f(u)\ du \ = \ \int_{0}^{a} f(u)\ du$$
(la deuxième égalité est obtenue par parité de la fonction f*)*

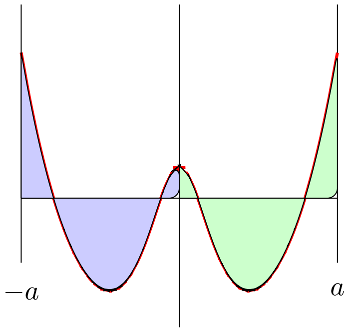
Ainsi, si $\displaystyle\int_{0}^{a} f(u)\ du$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ dt$. Ces deux intégrales étant convergentes, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(u)\ du$ est alors convergente.

- On procède de même si f est impaire.
À l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$, on obtient :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{a}^{0} -f(-u)\ du \ = \ \int_{a}^{0} f(u)\ du \ = \ -\int_{0}^{a} f(u)\ du$$

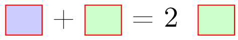
□

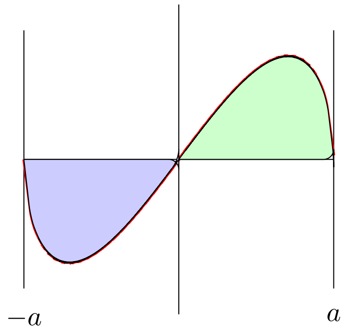
Commentaire

Représentation graphique.*(Cas d'une intégrale sur un segment)*

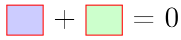


Cas d'une fonction paire





Cas d'une fonction impaire



Exemple

- Étude et nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
  De plus, elle est impaire car, pour tout $t \in\,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:

  $$f(-t) \;=\; \frac{-t}{\sqrt{2-(-t)^2}} \;=\; \frac{-t}{\sqrt{2-t^2}} \;=\; -f(t)$$

  2) On en déduit que : $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = -\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$.

  Or l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente (à démontrer).

  3) On en déduit que $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt$ est convergente, de valeur :

  $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt + \int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\, dt = 0$$

- Étude et nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto t$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
  De plus, elle est impaire car, pour tout $t \in\,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:

  $$f(-t) \;=\; -t \;=\; -f(t)$$

  2) On en déduit que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\, dt = -\int_{0}^{+\infty} t\, dt$.

  Pour $A \in [0, +\infty[$:

  $$\int_{0}^{A} t\, dt = \left[\, \frac{t^2}{2} \,\right]_0^A = \frac{A^2}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\, dt$ n'est pas convergente.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt$ est divergente. On `NE` peut notamment `PAS` conclure que :

$$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} t\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{0} t\ dt + \int_{0}^{+\infty} t\ dt \ = \ 0}$$

III. Critères de convergence

III.1. Les intégrales de référence

Ces intégrales sont des intégrales de référence que l'on peut utiliser comme du cours.

III.1.a) Intégrale « exponentielle »

Théorème 5.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt \ \textit{converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 0$$

Preuve.
La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

Si $\alpha = 0$: $\displaystyle\int_{0}^{x} 1\ dt = [\ t\ ]_{0}^{x} = x$

Comme $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 0$: $\displaystyle\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_{0}^{x} = -\left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$

Enfin si $\alpha > 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et si $\alpha < 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

□

III.1.b) Intégrales de Riemann

Théorème 6.
Soient a et b deux réels **strictement positifs**, *et α un réel.*

- *Intégrale de Riemann impropre en $+\infty$:*

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \ \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \alpha > 1$$

- *Intégrale de Riemann impropre en 0 :*

$$\int_{0}^{b} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \ \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \alpha < 1$$

Preuve.

- Soit $A > a$.
  - × Si $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned} \int_{a}^{A} \frac{1}{t^\alpha}\ dt \ &= \ \left[\frac{1}{-\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{a}^{A} \\ &= \ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) \end{aligned}$$

Or $\alpha - 1 > 0$. Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{1}{A^{\alpha-1}} = 0$.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ est convergente.

× Si $\alpha < 1$,

$$\int_a^A \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

Or $1 - \alpha > 0$. Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} A^{1-\alpha} = +\infty$.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ est divergente.

× Si $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{1}{t}\ dt &= [\ \ln(t)\ ]_a^A \\ &= \ln(A) - \ln(a) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{A \to +\infty} \ln(A) = +\infty$.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ est divergente.

- On montre en distinguant selon les mêmes cas que le point précédent :

$$\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}\ dt \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha < 1$$

□

⚠ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.2. Fonctions positives

Les résultats suivants pourront être adaptés à des fonctions continues et positives sur $]a, b]$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

III.2.a) Critère de convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue positive

Théorème 7.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b[$.

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[,\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ *converge* $\Leftrightarrow$ F *est majorée*

2) *Si F est non majorée, $\lim\limits_{x \to b} F(x) = +\infty$.*

Preuve.
$F' = f \geqslant 0$ donc F est croissante sur $[a, b[$. En vertu du théorème de la limite monotone, F admet donc une limite (finie ou non) en b. De plus :

× cette limite est finie si F est majorée.

$\times$ cette limite est $+\infty$ si F non majorée. $\square$

Théorème 8.

Soient $-\infty \leqslant a < b$ et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a, b]$.

Notons $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\ dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in]a, b],\ f(x) \geqslant 0$.

1) $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ *converge* $\quad\Leftrightarrow\quad$ *G est majorée*

2) *Si G est non majorée, $\displaystyle\lim_{x\to a} G(x) = +\infty$.*

Preuve.
$G' = -f \leqslant 0$ donc G est décroissante sur $]a, b]$. En vertu du théorème de la limite monotone, G admet donc une limite (finie ou non) en a. De plus :

$\times$ cette limite est finie si G est majorée.

$\times$ cette limite est $+\infty$ si G non majorée. $\square$

III.2.b) Critère de comparaison par inégalité

Théorème 9.
Soient f et g deux fonctions continues et **positives** *sur $[a, b[$ telles que :*

$$\forall t \in [a, b[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

- *Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.*
- *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ diverge.*

Exercice 3

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\ dt$

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\ dt$

III.2.c) Critère de comparaison par négligeabilité

Théorème 10.
Soient f et g deux fonctions continues et **positives** *sur $[a, b[$ telles que :*

$$f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$$

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.*

2. *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ diverge.*

Exercice 4

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Elle est plus **positive** sur $[0, +\infty[$.

  2) De plus : $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-t})$.

  × Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente.

  × Ainsi, par le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ est convergente.

- Étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\ dt$.

  1) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
  Elle est plus **positive** sur $[1, +\infty[$.

  2) De plus : $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$.
  (comprendre que $\dfrac{1}{\ln(t)}$ est grand devant $\dfrac{1}{t}$)

  × Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est divergente.

  × Ainsi, par le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\ dt$ est divergente.

III.2.d) Critère de comparaison par équivalence

Théorème 11.
Soient f et g deux fonctions continues et **positives** *sur $[a, b[$ telles que :*

$$f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$$

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont de même nature.

Exercice 5
Déterminer, en fonction de α, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}\ dt$.

III.3. Critère de convergence d'une intégrale d'une fonction continue négative

- Dans le cas où la fonction f considérée est continue et négative sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$), on se ramène aux cas précédents en considérant la fonction $-f$ qui est positive sur cet intervalle.
- En réalité, les théorèmes précédents auraient pu être énoncés dans le cas de fonctions continues négatives. La bonne hypothèse est donc celle de fonction continue et **de signe constant**.

III.4. Fonctions de signe quelconque

Définition (Convergence absolue)
Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est *absolument convergente* et $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$ converge.

Théorème 12.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ *converge absolument, alors elle est convergente.*

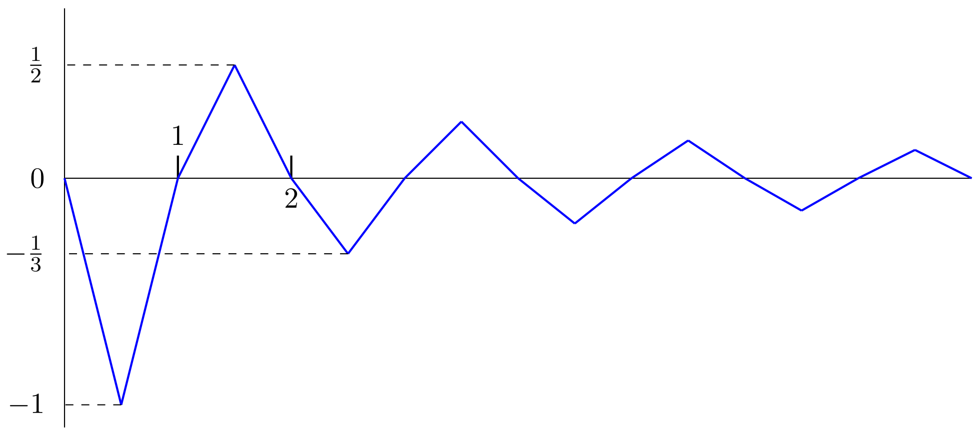
Preuve.
Notons $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.
× $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ est la partie positive de f.
× $f^- : x \mapsto -\min(f(x), 0) = \max(-f(x), 0)$ est la partie négative de f.
Supposons $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ absolument convergente.

- On a : $\forall t \in [a, b[,\ \ 0 \leqslant f^+(t) \leqslant |f(t)|$.
  × Or $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$ est convergente.
  × Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f^+(t)\ dt$ est aussi convergente.
- On a : $\forall t \in [a, b[,\ \ 0 \leqslant f^-(t) \leqslant |f(t)|$.
  × Or $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$ est convergente.
  × Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f^-(t)\ dt$ est aussi convergente.

Enfin, on remarque :
$$f = f^+ - f^-$$
On en conclut, par linéarité, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente. □

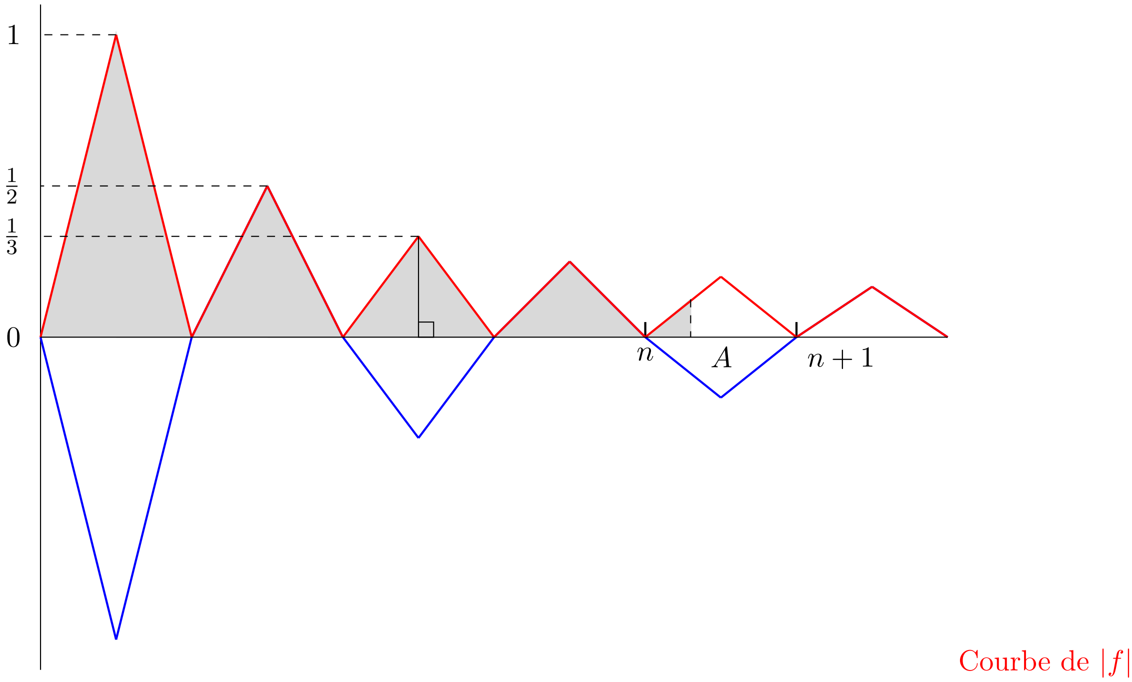
La réciproque est fausse !

Exemple
On définit la fonction f sur $[0, +\infty[$ de courbe représentative suivante :



Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente mais pas absolument convergente.

- Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ n'est pas absolument convergente, *i.e.* que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente.
  Commençons par tracer l'allure de $t \mapsto |f(t)|$.



Soit $n \in \mathbb{N}$.
La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n} |f(t)|\,dt$ est donc égale à la somme des aires des n premiers triangles grisés.
Or, l'aire du k-ième triangle vaut

$$\frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(\cancel{k} - (\cancel{k} - 1)) \times \frac{1}{k}}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{k}$$

Donc, en revenant au calcul d'intégral :

$$\int_0^{n} |f(t)|\,dt \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Pour tout $A \geqslant 0$, on note $n = \lfloor A \rfloor$ sa partie entière, en particulier $n \leqslant A$. Comme la fonction $|f|$ est positive, on a donc la minoration suivante :

$$\int_0^{A} |f(t)|\,dt \geqslant \int_0^{n} |f(t)|\,dt \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique qui est une série divergente.

Donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ diverge, *i.e.* l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ n'est pas absolument convergente.

- Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente.

  Comme pour le calcul d'intégrale précédent, on se ramène à la somme des aires des triangles.

  > Attention, les aires des triangles sous l'axe des abscisses sont comptées négativement et celles des triangles au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement.

  Soit $n \in \mathbb{N}$, on obtient donc :

  $$\int_0^n f(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

  Soit $A \geqslant 0$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant A < n+1$ (il s'agit de la partie entière de $\lfloor A \rfloor$). On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du n-ième triangle. On a l'encadrement suivant (attention, f n'est pas une fonction positive sur tout $[0, +\infty[$)

  $$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt - \mathcal{A}_{n+1} & \leqslant & \displaystyle\int_0^A f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^n f(t)\ dt + \mathcal{A}_{n+1} \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} & \leqslant & \displaystyle\int_0^A f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}
\end{array}$$

  Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = 0$ et la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est la série harmonique alternée qui est une série convergente (pour la preuve, se référer au chapitre sur les Séries, c'est une application du théorème des suites adjacentes).

  D'après le théorème d'encadrement, on a bien que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge (elle converge vers la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ qui vaut $-\ln(2)$)

Finalement on a bien que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente mais pas absolument convergente.

Théorème 13.

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$). Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Supposons de plus que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est **absolument convergente**.

1. *Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.*

2. $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \ \leqslant \ \int_a^b |\ f(t)\ |\ dt$

III.5. Comparaison série-intégrale

Théorème 14.
Soit f est une fonction **continue**, **positive** *et* **décroissante** *sur un intervalle* $[a, +\infty[$.
Alors la série $\sum f(n)$ *est de même nature que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

Corollaire 1.
La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

IV. Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive** sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$. On pose $\ell = b - a$ (« longueur de l'intervalle »). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les points :

$$a_0 = a,\ a_1 = a + \frac{\ell}{n},\ a_2 = a + 2\frac{\ell}{n},\ \ldots,\ a_n = a + n\frac{\ell}{n}.$$

Autrement dit

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = a + i\frac{\ell}{n}.$$

Notons que $a_n = b$. La suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ forme ce qu'on appelle une *subdivision* de l'intervalle $[a, b]$.

Calculons l'aire de la partie formée par les rectangles. Il y a n rectangles. La base de chaque rectangle est égale à $\dfrac{\ell}{n} = \dfrac{b-a}{n}$. Par contre, les hauteurs des rectangles varient et valent respectivement (on utilise ici la positivité de f) :

$$f(a_0),\ f(a_1),\ \ldots,\ f(a_{n-1})$$

L'aire grisée vaut donc :

$$\frac{\ell}{n} f(a_0) + \frac{\ell}{n} f(a_1) + \cdots + \frac{\ell}{n} f(a_{n-1}) = \frac{\ell}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$$

Ce nombre s'appelle la *n-ème somme de Riemann associée à f*. La suite des sommes de Riemann associée à une fonction f est toujours convergente d'après le théorème suivant :

Théorème 15.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Proposition 4 (Erreur des sommes de Riemann).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit c une constante telle que :

$$\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leqslant c.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right| \leqslant \frac{c}{n}$$

V. Étude d'intégrales

1. Intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$

- Intégration « à vue » : on trouve une primitive F de f, et : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = [\ F(t)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$.
- À défaut : intégration par parties.
  Proposition 5 (Formule d'intégration par parties).
  Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.
  Soit $(a,b) \in I^2$.
  $$\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt$$
  Ce qu'on peut lire :
  $$\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = [\ u(t)\ v(t)\ ]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt$$
- À défaut : intégration par changement de variable.
  Proposition 6 (Formule de changement de variable).
  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
  Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$.
  $$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt$$
- À défaut (rare) : on essaie de répondre à la question sans calculer l'intégrale - sauf si la question est « calculer l'intégrale » auquel cas il doit bien y avoir une astuce...

2. Suites d'intégrales $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ dt = I_n$

- *Sens de variation* : on calcule
  $$I_{n+1} - I_n = \int_a^b f_{n+1}(t)\ dt - \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b (f_{n+1}(t)dt - f_n(t))\ dt$$
  puis on étudie le signe de l'intégrale obtenue.
  En général, la suite étudiée est monotone. On cherche donc à la majorer ou minorer selon le cas, sans oublier que 0 est souvent un excellent candidat. On peut aussi utiliser l'inégalité de la moyenne :
  $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f_n(t)\ dt \leqslant M(b-a)$$

- *Recherche de la limite* : on cherche à majorer/minorer/encadrer l'intégrale par une/des intégrales calculables en se débarrassant de ce qui « gêne », mais en conservant ce qui « bouge » (donc dépend de n), puis on utilise le théorème d'encadrement.
- *Calcul de I_n* : uniquement s'il est demandé ! Il se fait le plus souvent à partir d'une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n (ou I_n et I_{n-1}) obtenue la plupart du temps à l'aide d'une intégration par parties.

3. **Intégrale** $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt = F(x)$ (intégrale fonction de sa borne supérieure)
où f est définie et continue sur un intervalle I, a est un élément fixé de I, et x est un élément quelconque de I.

- Si on sait son cours : F est la primitive de f sur I qui s'annule au point a, donc : $F'(x) = f(x)$.
- Sinon : soit Φ une primitive de f sur I (il y en a, vu que f est continue sur I). On a :

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a) \longrightarrow F'(x) = \Phi'(x) = f(x)$$

($\Phi(a)$ est une *constante*, donc disparaît par dérivation).

4. **Intégrale** $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = F(x)$ (généralisation du cas précédent)
où f est définie et continue sur un intervalle I, et x est un élément quelconque d'un intervalle J tel que $u(x)$ et $v(x)$ sont deux éléments de I.
L'essentiel : F **n'est pas** une primitive de f.

- Sauf exception, **on ne cherche pas** à calculer l'intégrale qui définit $F(x)$.
- Soit Φ une primitive de f sur I (il y en a, vu que f est continue sur I). On a :

$$F(x) = \Phi(v(x)) - \Phi(u(x))$$

- Toutes les propriétés de F découlent de cette égalité.

Ainsi en sera-t-il de la continuité de F, qui dépend de celle de u, v et Φ (cette dernière ne pose pas de problème, vu que Φ, étant une primitive de f, est dérivable et donc continue sur I.
De même, la dérivabilité de F dépend de celle de de u, v et Φ, et, lorsque c'est le cas :

$$\begin{aligned} F(x) = \Phi(v(x)) - \Phi(u(x)) \Rightarrow F'(x) &= \Phi'(v(x))v'(x) - \Phi'(u(x))u'(x) \\ &= f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x) \end{aligned}$$

Exemples
Quelques exemples de dérivation :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\ dt \longrightarrow F'(x) = 2f(2x) - f(x) \\ F(x) &= \int_x^{x^2} f(t)\ dt \longrightarrow F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) \\ F(x) &= \int_{-x}^{x} f(t)\ dt \longrightarrow F'(x) = f(x) + f(-x) \end{aligned}$$

5. Intégrales dépendant d'un paramètre $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)\ dt$ (peu fréquent)

L'essentiel : F **n'est pas** une primitive de f.

- Sauf exception, **on ne cherche pas** à calculer l'intégrale qui définit $F(x)$.
- Aucun théorème au programme ne dit quoi que ce soit sur la dérivabilité de F.

× *Ensemble de définition* : on cherche les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale existe.

× *Sens de variation* : on choisit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \leqslant x_2$ et on calcule $F(x_2) - F(x_1)$ pour en trouver le signe.

× Pour le reste, on suit l'énoncé...

Commentaire

Tous les résultats précédents s'adaptent au cas des intégrales généralisées.

Exemples

a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-tx^2}\ dt$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\mathrm{e}^{tx}}{x}\ dt$