Fonctions

I. Limites et continuité d'une fonction

I.1. Définition de la notion de limite

Dans ce paragraphe, on considère f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ($I = [a, b]$ ou $]a, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$ ...) et x_0 un réel appartenant à I ou étant une borne finie de l'intervalle I.

Définition (Limite finie en une valeur finie)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f a pour limite ℓ au point x_0 (ou f tend vers ℓ en x_0) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \big[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\big] \ \cap\ I,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On le notera $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque Intuitivement, dire que la fonction f a pour limite ℓ au point x_0 revient à dire que $f(x)$ peut être aussi proche de ℓ que l'on veut, quitte à choisir un x suffisamment proche de x_0.

Remarque Lorsque x_0 appartient à I, dire que f admet une limite ℓ en x_0 permet de dire que nécessairement $f(x_0) = \ell$. On a donc dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui est la définition de la continuité de f au point x_0.

Proposition 1 (Unicité de la limite)**.**
Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique. Autrement dit, si f admet pour limite ℓ_1 et pour limite ℓ_2 au point x_0, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Preuve.
Supposons par l'absurde que f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. Posons $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$. Alors comme f admet pour limite ℓ_1 en x_0, on a pour ce ε

$$\exists \alpha_1 > 0,\ \forall x \in \big[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1\big] \ \cap\ I,\ |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon.$$

De même, comme f admet pour limite ℓ_2 en x_0, on a pour ce ε

$$\exists \alpha_2 > 0,\ \forall x \in \big[x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2\big] \ \cap\ I,\ |f(x) - \ell_2| \ \leqslant\ \varepsilon.$$

On en déduit que pour $x \in \big[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1\big] \ \cap\ \big[x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2\big] \ \cap\ I$

$$\begin{cases} |f(x) - \ell_1| & \leqslant \varepsilon \\ |f(x) - \ell_2| & \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

or par inégalité triangulaire

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|.$$

Ce qui constitue une contradiction.

$\square$

Définition (Limite à gauche, limite à droite)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f a pour *limite à gauche* ℓ au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \big[x_0 - \alpha, x_0\big[\ \cap\ I,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On le notera soit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$, soit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.
On dit que la fonction f a pour *limite à droite* ℓ au point x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \big]x_0, x_0 + \alpha\big]\ \cap\ I,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On le notera soit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$, soit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Remarque Il est clair que si x_0 n'est pas une extrémité de I, alors

$$\text{« } f \text{ admet une limite finie en } x_0 \text{ »} \quad \Longrightarrow \quad \text{« } f \text{ admet une limite finie à gauche et à droite en } x_0 \text{ ».}$$

Cependant, cette limite n'est pas forcément la même.

Exemple 1
La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet une limite à gauche et une limite à droite en 1,

$$\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1, \qquad \lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0.$$

mais n'admet pas de limite en 1.

Définition (Limite infinie en une valeur finie)
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 (ou f tend vers $+\infty$ en x_0) si

$$\forall M > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \big[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\big]\ \cap\ I,\ f(x) > M.$$

On le notera $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 (ou f tend vers $+\infty$ en x_0) si

$$\forall M < 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \big[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\big]\ \cap\ I,\ f(x) < M.$$

On le notera $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Définition (Limite finie en une valeur infinie)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ (ou f tend vers ℓ en $+\infty$) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x > A,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On le notera $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
On dit que la fonction f a pour limite ℓ en $-\infty$ (ou f tend vers ℓ en $-\infty$) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A < 0,\ \forall x < A,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On le notera $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

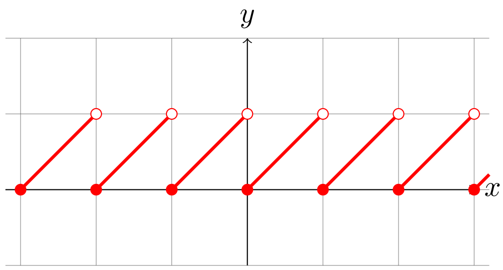
Définition (Limite infinie en une valeur infinie)
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$), (ou f tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$) si

$$\underset{(\text{resp. } M<0)}{\forall M > 0}, \quad \underset{(\text{resp. } A<0)}{\exists A > 0}, \quad \underset{(\text{resp. } x<A)}{\forall x > A}, \quad \underset{(\text{resp. } f(x)<M)}{f(x) > M}.$$

On le notera $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Remarque Toutes ces définitions de limites reviennent au même : il s'agit toujours de dire que $f(x)$ est aussi proche de sa limite que l'on veut tant que x est suffisamment proche de a. Cependant, « être proche de l'infini » se traduit par « être très grand ».

⚠ Si f n'admet pas de limite en une valeur, alors on s'abstiendra d'écrire $\lim f(x)$. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ n'admet pas de limite en $+\infty$.



I.2. Opérations sur les limites

Définition (Addition de limites)
Par convention, on étend l'addition aux symboles ∞ :

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $(+\infty) + \ell = \ell + (+\infty) = +\infty$,
- $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $(-\infty) + \ell = \ell + (-\infty) = -\infty$.

Cependant, les opérations suivantes ne sont pas définies :

- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$

On parle de « quantité indéterminée ».

Proposition 2.
Soit f et g deux fonctions admettant une limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

tant que le membre de droite n'est pas une quantité indéterminée.

Exemple 2

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \lim_{x\to+\infty} (-3) = (+\infty) + (-3) = +\infty.$$

Définition (Multiplication de limites)
Par convention, on étend la multiplication aux symboles ∞ :

- $(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$,
- $(-\infty) \times (+\infty) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$,

- $\forall \ell > 0$, $(+\infty) \times \ell = \ell \times (+\infty) = +\infty$, et $(-\infty) \times \ell = \ell \times (-\infty) = -\infty$.
- $\forall \ell < 0$, $(+\infty) \times \ell = \ell \times (+\infty) = +\infty$, et $(-\infty) \times \ell = \ell \times (-\infty) = -\infty$.

Les quantités suivantes sont indéterminées : $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, $(+\infty) \times 0$ et $(-\infty) \times 0$.

Proposition 3.
Soit f et g deux fonctions admettant une limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors

$$\lim_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x),$$

tant que le membre de droite n'est pas une quantité indéterminée.

Exemple 3

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} \ln(x)\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Définition
Soit f une fonction admettant pour limite 0 en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ telle que $f(x)$ reste strictement positif (resp. strictement négatif) au voisinage de a. On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; 0^+ \quad \text{(resp. } 0^-\text{)}.$$

Définition (Quotient de limites)
Par convention, on a :

- $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$, et $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$,
- $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$, et $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$,
- $\dfrac{+\infty}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty$, et $\dfrac{+\infty}{0^-} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$.

Les quantités suivantes sont indéterminées : $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$. De même que $\dfrac{1}{0}$ est une quantité indéterminée lorsqu'on ne connait pas le signe de la quantité au dénominateur.

Proposition 4 (Inverse d'une limite)**.**
Soit f une fonction admettant une limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)},$$

tant que le membre de droite n'est pas une quantité indéterminée.

Exemple 4

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(1 - x^2)}{1 - x^2} = \frac{\lim_{x \to 1} \ln(x^2 - 1)}{\lim_{x \to 1^+} \underbrace{(1 - x^2)}_{>0 \text{ si } x>1}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Remarque En gros, ce qu'il faut retenir c'est que la limite de la somme (resp. produit, quotient) est égale à la somme des limites (resp. produit, quotient), tant que ces quantités sont bien définies.

Attention à l'exponentiation de limites ! Lorsqu'on a une quantité du type $f(x)^{g(x)}$, il faut passer par la forme "exponentielle du logarithme" avant de conclure au risque de ne pas voir une quantité indéterminée cachée et raconter n'importe quoi. Par exemple, malgré les apparences, $1^{+\infty}$ ou 0^0 sont formes indéterminées, en effet

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x} = 0.$$

Proposition 5 (Limite de la composée de fonctions.).
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et soient a, b et $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = c,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c.$$

Exemple 5

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0.$$

Proposition 6.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeur dans I et soient a et $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{n\to +\infty} u_n = a,$$

alors

$$\lim_{n\to \infty} f(u_n) = b.$$

Preuve.
Nous allons traiter le cas où a et b sont des valeurs finies.
Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - b| < \varepsilon$.
Comme f admet pour limite b en a, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \big[a - \alpha, a + \alpha\big] \ \cap \ I, \ |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (*)$$

De plus, comme u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - a| < \alpha.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \big[a - \alpha, a + \alpha\big] \ \cap \ I$ ce qui implique par $(*)$ que $|f(u_n) - b| < \varepsilon$. $\square$

I.3. Passage à la limite dans des inégalités

Proposition 7.
Soient f, g deux fonctions définies sur I dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que f et g admettent une limite en a. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Preuve.
Nous faisons la démonstration dans le cas de limite finie et que a est finie.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$. On suppose par l'absurde que $\ell_1 > \ell_2$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3}$. Comme f et g admettent une limite en a, on a que

$$\exists \alpha_1 > 0, \ \forall x \in \big[a - \alpha_1, a + \alpha_1\big] \ \cap \ I \ \cap \ I, \ \ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon,$$
$$\exists \alpha_2 > 0, \ \forall x \in \big[a - \alpha_2, a + \alpha_2\big] \ \cap \ I, \ \ell_2 - \varepsilon < g(x) < \ell_2 + \varepsilon.$$

Soit $x \in \big[a - \alpha_1, a + \alpha_1\big] \ \cap \ \big[a - \alpha_2, a + \alpha_2\big] \ \cap \ I$. On a

$$f(x) > \ell_1 - \varepsilon = \ell_1 - \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} \quad \text{et} \quad g(x) < \ell_2 + \varepsilon = \ell_2 + \frac{\ell_1 - \ell_2}{3}$$

et donc
$$f(x) - g(x) > \ell_1 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} - \left(\ell_2 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}\right) = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0.$$
et on en déduit que $f(x) > g(x)$ ce qui aboutit à une contradiction. $\square$

⚠ Si on a une inégalité stricte, le passage à la limite se transforme en une égalité large. Par exemple, $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $g : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x^2}$. On a pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$f(x) < g(x) \quad \text{mais} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \leqslant \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

Théorème 1 (Théorème d'encadrement ou Théorème des gendarmes.)**.**
Soient f, g et h trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- *Si on suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et que f et h admettent la même limite finie ℓ en a, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.*
- *Si on suppose que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et que f tend vers $+\infty$ en a, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.*
- *Si on suppose que pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant h(x)$ et que h tend vers $-\infty$ en a, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.*

Preuve.
C'est une conséquence directe de la proposition précédente. $\square$

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)**.**
Soit a et $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit f une fonction monotone définie sur $]a, b[$. Alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de $]a, b[$. De plus, f admet une limite à gauche en a (resp. à droite en b) potentiellement infinie.

I.4. Croissance comparée et méthodes de calcul de limites

I.5. Croissance comparée

On commence par rappeler les vitesses standards de convergence.

Proposition 8.
Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

Corollaire 1.
Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln(x))^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta (\ln(x))^\alpha = 0.$$

Preuve.
On pose $y = \dfrac{1}{x}$. Alors
$$\lim_{x \to 0^+} x^\beta (\ln(x))^\alpha = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\beta \left(\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)^\alpha = \lim_{y \to +\infty} \frac{-(\ln(y))^\alpha}{y^\beta} = 0.$$
$\square$

Proposition 9.
Pour tous $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0$.

Corollaire 2.
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0.$$

Preuve.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma x}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{(\ln(x))^\alpha}{x}}_{\longrightarrow 0} \underbrace{\frac{x}{\mathrm{e}^{\gamma x}}}_{\longrightarrow 0} = 0.$$

$\square$

Remarque Il est important de noter α, β et γ sont des réels quelconques et pas seulement des entiers. Par exemple,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{\mathrm{e}^{\ln(3)x}} = 0,$$

on a ici $\beta = \dfrac{1}{2}$ et $\gamma = \ln(3)$.

On peut donc résumer tout cela en disant que, pour tout α, β et $\gamma > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll \mathrm{e}^{\gamma x},$$

où la notation $f(x) \ll g(x)$ signifie que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Lorsqu'on a affaire à une quantité indéterminée du type $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$, un moyen de lever l'indétermination est de réussir à savoir lequel des « infinis » (ou des 0) est le plus « fort ». Pour cela, on commence par factoriser par ce qui nous « semble le plus fort » d'après ce qui précède. Cela fait apparaître des rapports dont on connait les limites et en générale, cela lève l'indétermination.

Exemple 6

1. On souhaite calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 2x^2 - x\ln(x)}{3x^3 - \mathrm{e}^{2x}}$$

On a une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. On commence par factoriser en haut et en bas par ce qui est le plus fort.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 2x^2 - x\ln(x)}{3x^3 - \mathrm{e}^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\big(\frac{1}{2x^2} + 1 - \frac{\ln(x)}{2x}\big)}{-\mathrm{e}^{2x}\big(-3x^3\mathrm{e}^{-2x} + 1\big)} = \lim_{x\to+\infty} (-2)\frac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}} \times \frac{\lim_{x\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{\ln(x)}{2x}\big)}{\lim_{x\to+\infty} \big(1 - 3x^3\mathrm{e}^{-2x}\big)}$$

On peut alors conclure.

2. On souhaite calculer

$$\lim_{x\to 0^+} 2x + \frac{1}{x^2} + 3\ln(x)$$

On a une forme $\infty - \infty$. On factorise par le terme le plus fort.

$$\lim_{x\to 0^+} 2x + \frac{1}{x^2} + 3\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\big(2x^3 + 1 + 3x^2\ln(x)\big) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \lim_{x\to 0^+} \big(1 + 2x^3 + 3x^2\ln(x)\big).$$

Ce qui nous permet de conclure.

I.6. Taux d'accroissement

On rappelle qu'un taux d'accroissement de la fonction f entre les valeurs x et y est

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

On rappelle aussi que lorsque f est dérivable au point y, on a

$$\lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(x).$$

En partant de ce constat, on arrive à transformer des quantités indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ en la limite d'un taux d'accroissement, pour lever l'indétermination.

Exemple 7

- On souhaite calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

  On constate qu'il s'agit d'un $\dfrac{0}{0}$, donc on ne peut pas conclure tout de suite. Cependant, on posant $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on remarque que

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

  donc comme f est dérivable en 0 et sa fonction dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, on en déduit que

  $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

- On souhaite calculer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\big(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\big)$.

  On ramène la limite en 0 avec un changement de variable $y = \dfrac{1}{x^2}$.

  $$\lim_{x\to +\infty} x^2\big(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\big) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^y}{y}$$

  puis on reconnait le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre y et 0.

  $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^y}{y} = \lim_{x\to 0} -\frac{\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^y}{0-y},$$

  ce qui nous permet de conclure $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\big(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\big) = -1$.

I.7. Quantité conjuguée

Lorsqu'on regarde la limite de la différence de deux racines carrées, on a souvent la forme indéterminée $\infty - \infty$. Dans ce cas, il est souvent utile de multiplier par *la quantité conjuguée*, pour lever l'indétermination.

Définition (Quantité conjuguée)
Pour tous réels a, b positifs, on appelle *quantité conjuguée* de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (resp. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$) le nombre $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (resp. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$).

Exemple 8

- On souhaite calculer la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-x$.
  On identifie une différence de racines carrées puisque
  $$\sqrt{x^2+3}-x=\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2},$$
  puis on multiplie par la quantité conjuguée tout en divisant par celle-ci.
  $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-x=\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$$
  Ce n'est plus une forme indéterminée, on peut conclure que la limite est 0.
- On souhaite calculer la limite suivante : $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}}{x-3}$.
  C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. On multiplie en haut et en bas par la quantité conjuguée.
  $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}}{x-3}=\lim_{x\to 3} \frac{(2x+1)-(x+4)}{(x-3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}}$$
  ce n'est plus indéterminée, on peut conclure que la limite vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

I.8. Définition de la continuité

Définition (Continuité)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *continue en* x_0 (ou au point x_0) si
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$
On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de I.

Exemple 9
La plupart des fonctions usuelles sont continues. La fonction partie entière, par contre, n'est pas continue.

Proposition 10.

- *La somme de deux fonctions continues est une fonction continue.*
- *Le produits de deux fonctions continues est une fonction continue.*
- *L'inverse d'une fonction continue (qui ne s'annule pas) est une fonction continue.*
- *La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.*

Remarque La plupart du temps, pour justifier la continuité d'une fonction, on la décomposera selon les opérations élémentaires $+, \times, \circ$ en fonctions usuelles continues. Par exemple
$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-xe^{-x^2}}{x^2+2},$$
est une fonction continue.

Proposition 11.
Soit f une fonction continue au point x_0. Alors, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$ quand n tend vers $+\infty$.

Définition (Prolongement continu)
Soit f une fonction continue sur $I \setminus \{x_0\}$. On dit que f admet un *prolongement continue* en x_0 si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Dans ce cas, on posera $\hat{f}$ sur I

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\hat{f}$ est continue.

Remarque Par abus de notation, on notera souvent le prolongement continue de la fonction de la même manière.

Remarque Cette définition s'applique essentiellement dans deux cas de figure :

1. Premier cas : le domaine de définition naturel de la fonction possède des valeurs « interdites » qui n'en sont pas vraiment. Par exemple, si on considère la

$$f : x \mapsto x \ln(x),$$

le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$. Cependant, la limite à droite de f en 0 est finie est vaut 0.

2. Second cas : la fonction que l'on considère est « définie par morceaux ». C'est-à-dire que l'expression de la fonction à droite de x_0 n'est pas la même à gauche. Dans ce cas, on vérifie si la fonction se raccorde en x_0. Par exemple,

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x+5}{x^2+2} & \text{si } x < 1, \\ \\ \sqrt{x-1} + 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On vérifie que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

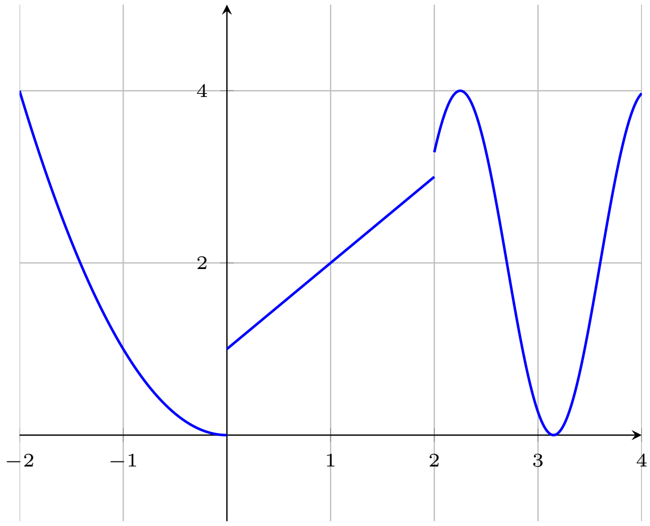
Exemple 10 On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est définie par

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^{-n}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, dans le cas où $\alpha > 0$, la fonction admet un prolongement continue en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \lim_{x \to 0^+} \exp(\alpha \ln(x)) = \lim_{y \to -\infty} \exp(y) = 0.$$

Définition (Continuité par morceaux)
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que f est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ si elle est continue en tout point de I sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n$ où elle admet une limite à gauche et une limite à droite.
Une fonction est dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.



Remarque Une fonction continue est une fonction continue par morceaux. La fonction partie entière est une fonction continue par morceaux mais pas continue.

Il existe des fonctions qui ne sont pas continues mais qui ne sont pas non plus continues pas morceaux.

I.9. Théorème des valeurs intermédiaires

On rappelle que pour toute fonction f définie sur I, on note

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y\}\,.$$

Théorème 3 (Théorème des valeurs intermédiaires Version 1)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 (Théorème des valeurs intermédiaires Version 2)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (resp. $]a, b[$). Alors, pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (resp. compris entre $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$), il existe au moins un antécédent $x \in [a, b]$ (resp. $x \in]a, b[$) tel que $f(x) = \lambda$.

Remarque La version la plus souvent utilisée du théorème des valeurs intermédiaires est la suivante :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, tel que $f(a)f(b) < 0$ (*i.e.* « sont de signes opposés »).
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Dans le cas général, ce théorème permet d'obtenir l'existence de solution d'équations du type $f(x) = \lambda$.

Application
On souhaite montrer que l'équation $x^2 - 2 = 2\ln(x)$ possède une solution sur l'intervalle $[1, 2]$.
On commence par poser la fonction $f(x) = x^2 - 2 - 2\ln(x)$ qui est continue en tant que somme de fonctions continues. Ensuite, on l'évalue en 1 et en 3.

$$f(1) = 1 - 2 - 2 \times 0 = -1 < 0, \qquad f(2) = 4 - 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) \sim 0.61 > 0.$$

Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$, soit $\mathcal{C}^2 - 2 = 2\ln(c)$.

Grâce à la continuité, le théorème des valeurs intermédiaires permet seulement de connaître l'existence d'une solution pour une équation de type $f(x) = \lambda$. On a besoin d'une hypothèse supplémentaire pour connaître le nombre de solutions.

Corollaire 3 (Théorème de la bijection)**.**
Soit f continue sur $[a,b]$ et strictement monotone. Alors, pour tout $\lambda \in f([a,b])$ (i.e. pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$), il existe un et un seul $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = \lambda$.

Remarque ⚠ Pour montrer que l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a,b]$ (ou $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ selon les cas), on rédigera **toujours** le théorème de la façon suivante :

La fonction f est :

- continue sur l'intervalle $[a,b]$ (ou $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ selon les cas)
- strictement croissante (ou décroissante selon les cas) sur cet intervalle

D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise donc une bijection de $[a,b]$ sur
$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (à adapter suivant la forme de l'intervalle et la monotonie de f).
Or $c \in [f(a), f(b)]$, donc l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a,b]$

Remarque Grâce au théorème précédent, connaître les variations exactes de la fonction continue f permet de compter le nombre de solutions à l'équation $f(x) = \lambda$.

Application
Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$. On veut savoir combien il y a de solutions à l'équation $P(x) = -1$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait déjà qu'il y en a au moins une. Pour connaître les variations de P, on dérive le polynôme.

$$P'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	$+\infty$

On regarde sur chaque intervalle où la fonction P est monotone : $]-\infty,-1[$, $]-1,3[$, $]3,+\infty[$.

- <u>Sur $]-\infty,-1]$</u>

  La fonction P est :

  - continue sur l'intervalle $]-\infty,-1]$
  - strictement croissante sur cet intervalle

  D'après le théorème de la bijection, la fonction P réalise donc une bijection de $]-\infty,-1]$ sur
  $P(]-\infty,-1]) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} P(x), P(-1)\right] =]-\infty, 8]$.
  Or $-1 \in]-\infty, 8]$, donc l'équation $P(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty,-1]$.
- <u>Sur $]-1,3]$</u>

  La fonction P est :

  - continue sur l'intervalle $]-1,3]$
  - strictement décroissante sur cet intervalle

D'après le théorème de la bijection, la fonction P réalise donc une bijection de $]-1,3]$ sur $P(]-1,3]) = \left[P(3), \lim_{x\to-1} P(x)\right[= [-24, 8[$.

Or $-1 \in [-24, 8[$, donc l'équation $P(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1,3]$.

- Sur $]3, +\infty[$

  La fonction P est :

  - continue sur l'intervalle $]3, +\infty[$
  - strictement croissante sur cet intervalle

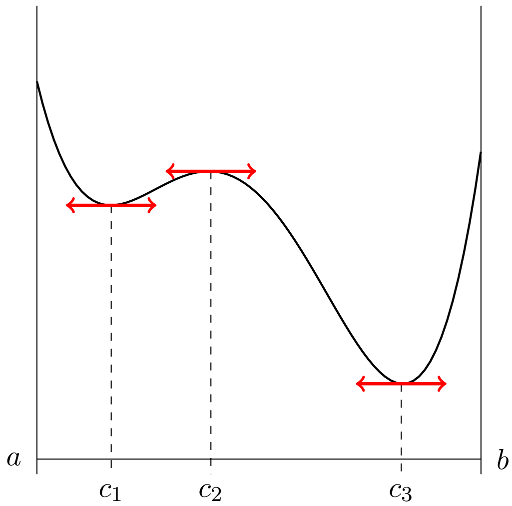
  D'après le théorème de la bijection, la fonction P réalise donc une bijection de $]3, +\infty[$ sur $P(]3, +\infty[) = \left]\lim_{x\to3} P(x), \lim_{x\to+\infty} P(x)\right[=]-24, +\infty[$.

  Or $-1 \in]-24, +\infty[$, donc l'équation $P(x) = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]3, +\infty[$.

En tout, l'équation $P(x) = -1$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Remarque Si f est strictement croissante et continue, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.
Si f est strictement décroissante et continue, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

Théorème 5 (Continuité sur un segment)**.**
Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors f possède un maximum M et un minimum m sur $[a,b]$. De plus, $f((a,b]) = [m, M]$.



Remarque Une autre formulation de ce théorème est de dire que l'image d'un segment par une fonction continue est lui-même un segment.

II. Dérivation

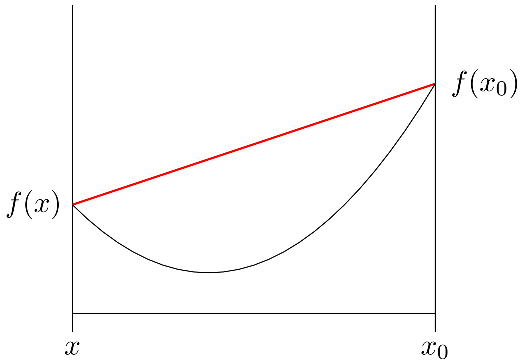
II.1. Définition de la dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition (Taux d'accroissement)
On appelle *taux d'accroissement* de f entre les points $a \neq b$, la quantité

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

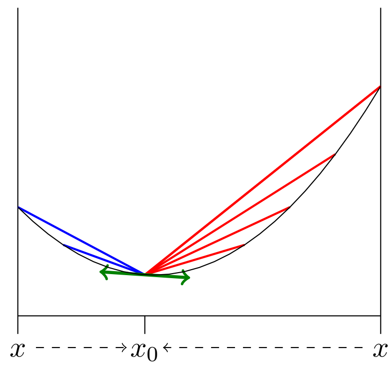
Remarque Le taux d'accroissement correspond à la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Cela correspond à la « croissance moyenne » de la fonction f entre les points a et b. Le segment reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est appelé *corde* de la courbe.



Définition (Nombre dérivé)
Soit $a \in I$, on dit que la fonction f est dérivable au point a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée *nombre dérivé* de f en a.



Remarque Le nombre dérivé correspond à la pente de la droite tangente à la courbe de f en $(a, f(a))$. Cela correspond à la « croissance instantanée » de la fonction f au point a. Si le nombre dérivé est égale à 0, la courbe de f a une tangente horizontale. Si le taux d'accroissement en a tend vers $\pm\infty$, la courbe de f a une tangente verticale.

Remarque Il est parfois pratique d'utiliser la forme alternative du taux d'accroissement pour calculer la dérivée

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Cela revient à se ramener en 0 en posant $h = x - a$.

Proposition 12.
Soit f dérivable au point a, alors

1. Développement limité d'ordre 1 : *Il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que*

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \varepsilon(x)$$

et telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

2. Equation de la tangente en $(a, f(a))$: *L'équation de la droite tangente à la courbe au point d'abscisse a est*
$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Remarque Ce résultat signifie que être dérivable en a implique que la courbe de f s'approxime à une droite au voisinage du point $(a, f(a))$. Ce n'est pas le cas de la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

Corollaire 4.
Soit f une fonction dérivable au point $a \in I$. Alors f est continue au point $a \in I$.

Preuve.
Si f est dérivable au point a, alors il existe une fonction $\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x)$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$ et
$$f(x) = f(a) + xf'(a) + \varepsilon(x).$$
Par conséquent, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \big(f(a) + xf'(a) + \varepsilon(x)\big) \; = \; f(a)$. Donc f est continue en a. □

⚠ La réciproque n'est pas vraie. Toute fonction continue en a n'est pas dérivable en a. Penser à la fonction valeur absolue en 0.

Définition (Dérivabilité)
Soit $a \in I$, on dit que la fonction f est dérivable à gauche (resp. à droite) au point a si
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$
existe et est finie. La limite est appelée *dérivée à gauche* (resp. *dérivée à droite*).

Remarque Lorsque f admet une dérivée à gauche (resp. à droite) en a, on pourra parfois parler de “demi-tangente” à gauche (resp. à droite) au point d'abscisse a.

Remarque La fonction valeur absolue admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en 0 mais n'est pas dérivable.

Proposition 13.
La fonction f est dérivable au point a si et seulement si la dérivée à gauche et la dérivée à droite de f en a existent et sont égales.

Définition (Fonction dérivée)
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On appellera *fonction dérivée* de f, notée $f'(x)$, la fonction qui à x associe le nombre dérivée de f en x.

Remarque Il y a deux principales raisons pour une fonction de ne pas être dérivable en un point.

- Soit f admet des dérivées à gauche et à droites différentes. Dans ce cas, la courbe de f possède une coin anguleux comme pour la fonction $x \mapsto |x|$.
- Soit la limite du taux d'accroissement explose (tend vers $\pm\infty$). Dans ce cas, la courbe de f admet une tangente verticale comme pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

II.2. Opération les dérivées.

Linéarité

Proposition 14.

- *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors la fonction $f+g$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut*
$$(f+g)' = f' + g'.$$
- *Soient f une fonction dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction λf est dérivable et sa dérivée vaut*
$$(\lambda f)' = \lambda f'.$$

Produit et quotient

Proposition 15.
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors la fonction $f \times g$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Proposition 16.
Soit g une fonction dérivable sur I et qui ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Proposition 17.
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et tel que g ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Composée

Proposition 18.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ deux fonctions dérivables sur leur domaine de définition. Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur J et sa dérivée vaut
$$\forall x \in J,\ (f \circ g)'(x) = g'(x) f'\big(g(x)\big).$$

Preuve.
Soit $x_0 \in J$. Alors pour tout $x \in J$
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{y \to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0)) g'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Exemple 11. *Dérivées usuelles*

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$\forall n \geqslant 1,\ x \mapsto (f(x))^n$	$x \mapsto nf'(x)(f(x))^{n-1}$	$\forall n \geqslant 1,\ x \mapsto \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^n$	$x \mapsto -n\dfrac{f'(x)}{(f(x))^{n+1}}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{f(x)}$	$x \mapsto f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$	si $f > 0,\ x \mapsto \ln(f(x))$	$x \mapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
si $f > 0,\ x \mapsto \sqrt{f(x)}$	$x \mapsto \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	si $f > 0,\ x \mapsto (f(x))^\alpha$	$x \mapsto \alpha f'(x)(f(x))^{\alpha-1}$

Rappel : Une fonction f strictement monotone et continue sur I est une bijection de I dans $J = f(I)$. On note f^{-1} sa bijection réciproque définie de J dans I. f et f^{-1} ont la même monotonie.

Corollaire 5.
Soit f une fonction bijective de I dans J. On suppose que f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur I. Alors, sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable et sa dérivée vaut

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

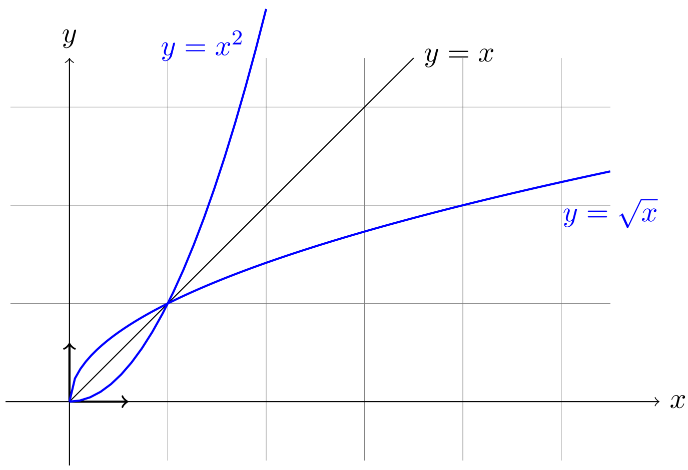
Preuve.
On a par définition que pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$. Si on dérive chaque membre de l'égalité, on obtient

$$(f^{-1})'(y)f'\big(f(y)\big) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f(y)\big)}.$$

$\square$

Remarque On retrouve la dérivée de la fonction $x \geqslant 0 : x \mapsto \sqrt{x}$ qui est la fonction réciproque de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après la formule

$$\big(x \mapsto \sqrt{x}\big)' = x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$



II.3. Dérivée d'ordre supérieure

Définition (Dérivée d'ordre n)
Soit f une fonction dérivable sur I. Si la fonction f' est elle-même dérivable, on peut alors définir la fonction f", qui la dérivée de la dérivée de f. On parlera de *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre deux.* Plus généralement, on définit par récurrence

- $f^{(1)} = f'$.
- Pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}$ est la dérivée de la fonction $f^{(n-1)}$. $f^{(n)}$ est appelée dérivée d'ordre n de f.

Remarque Par convention, on dira que $f^{(0)}$ est la fonction f elle-même.

Définition (Classe $\mathcal{C}^n$)
Soit f une fonction définie sur I.

- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si la fonction $f^{(n)}$ existe et est continue.
- La fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarque Si $m \geqslant n$ alors toute fonction de classe $\mathcal{C}^m$ est aussi une fonction $\mathcal{C}^n$.

Proposition 19.
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

- *La somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.*
- *Le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.*
- *Le quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.*
- *La composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.*

Exemple 12
Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto x|x|$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables. Regardons la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}|x|}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

La fonction f' s'exprime donc

$$f' : x \mapsto \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On vérifie que f' est bien continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$. Cependant, la fonction f' est bien dérivable sur sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ mais son taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0 car la limite à gauche et la limite à droite sont différente. En effet

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}} = -2,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2.$$

La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

II.4. Théorème des accroissements finis

Théorème 6 (Inégalité des accroissements finis)**.**
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient deux réels m, M tels que

$$\forall x \in I,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Alors,

$$\forall (a,b) \in I^2,\ a \leqslant b,\ m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Remarque Autrement dit, lorsque $a \neq b$, on a $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

Corollaire 6.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $k \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k.$$

Alors,

$$\forall (a,b) \in I^2,\ |f(b)-f(a)| \leqslant k|b-a|.$$

Corollaire 7.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

- *f est une fonction croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.*
- *f est une fonction décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.*
- *f est une fonction constante si et seulement si $f' = 0$.*

De plus, si on suppose que f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors

- *f est une fonction strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.*
- *f est une fonction strictement décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.*

⚠ Quand on parle de fonction monotone, on se restreint sur un intervalle. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

La fonction est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet

$$-3 < 2 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{-3} < \frac{1}{2}.$$

Définition (Minimum local)
Soit f une fonction définie sur I. On dit que f admet un *maximum local* (resp. *minimum local*) en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle $J \subset I$ tel que

$$\forall x \in J,\ f(x_0) \geqslant f(x), \quad (\text{resp. } \ f(x_0) \leqslant f(x)).$$

On dit que f admet un extremum local en x_0 si la fonction admet soit un maximum, soit minimum local en x_0.

Proposition 20.
Soit f une fonction dérivable sur I et soit $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de l'intervalle. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

⚠ Le contraire n'est pas vrai. La fonction $x \mapsto x^3$ a sa dérivée qui s'annule en 0 mais 0 n'est pas un extremum local. Par contre

$$(f'(x_0) = 0) \ \texttt{ET} \ \ (\text{la fonction } f' \text{ s'annule en changeant de signe}) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ admet un extremum local en } x_0.$$

Remarque Dans la pratique, pour trouver les extrema locaux d'une fonction, on dressera le tableau de variation de la fonction.

Application
Trouver les extrema locaux de la fonction $f : x \mapsto x^3 \mathrm{e}^{-x^2}$.
La fonction f est dérivable en tant que produit et composée de fonctions dérivables. Calculons sa dérivée

$$f'(x) = x^3(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} + 3x^2\mathrm{e}^{-x^2} = (3x^2 - 2x^4)\mathrm{e}^{-x^2} = 2x^2\left(\frac{3}{2} - x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2} = 2x^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - x\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + x\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

La fonction f' s'annule donc en $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, 0 et $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	0

Ainsi les extrema locaux de f sont en $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (minimum) et en $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (maximum). Cependant, 0 n'est ni l'un, ni l'autre.

III. Convexité

Définition (Fonction convexe)
Soit f une fonction définie sur I.

- On dit que f est une *fonction convexe* si

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1], \qquad f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

- On dit que f est une *fonction concave* si

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall t \in [0,1], \qquad f(ta + (1-t)b) \geqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

Remarque f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

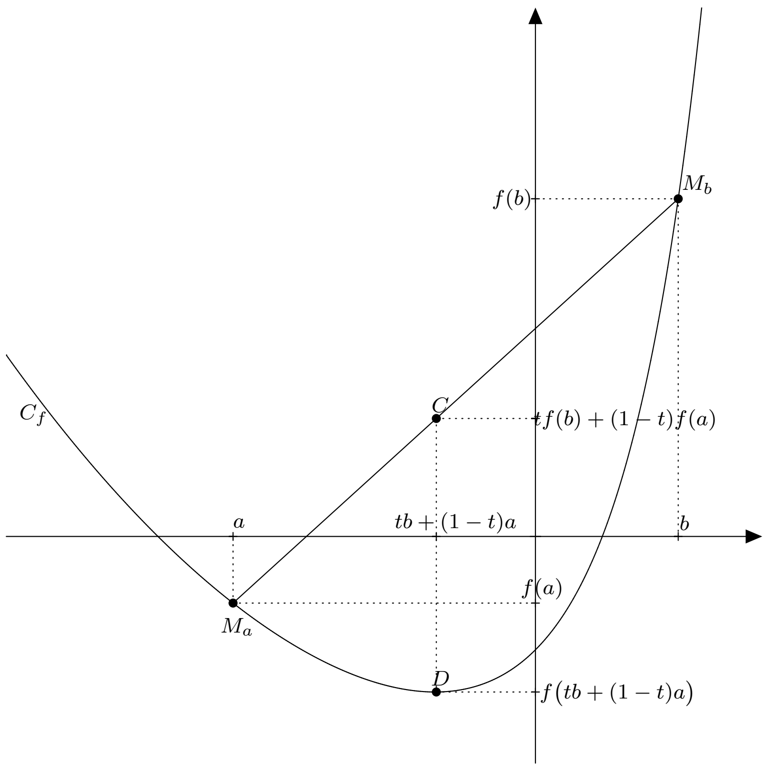
Remarque Une interprétation géométrique de la convexité d'une fonction f est de dire que la courbe de f est toujours en dessous de ses cordes.
On peut montrer que la droite passant par les points $M_a = (a, f(a))$ et $M_b = (b, f(b))$ a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Regardons le point C sur cette droite dont l'abscisse est $x = tb + (1-t)a$: pour cela, on remplace x par $tb + (1-t)a = t(b-a) + a$ dans l'équation, on obtient

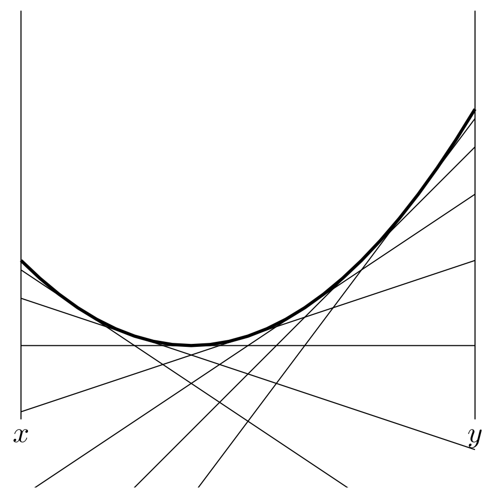
$$\begin{aligned} y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t(b-a) + a) + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} &= t(f(b) - f(a)) + \frac{af(b) - af(a) + bf(a) - af(b)}{b - a} \\ &= t(f(b) - f(a)) + f(a) \\ &= tf(b) + (1-t)f(a) \end{aligned}$$

On a donc
$$C = \big(tb + (1-t)a,\ tf(b) + (1-t)f(a)\big).$$
Regardons le point D sur la courbe de f dont l'abscisse est $x = tb + (1-t)a$. Son ordonnée est $f(tb + (1-t)a)$. On a donc
$$D = \big(tb + (1-t)a,\ f(tb + (1-t)a)\big).$$
L'inégalité de la convexité nous dit donc que le point C sur la corde est au dessus du point D sur la courbe (les deux points ont même abscisse et l'ordonnée de C est supérieure à celle de D).



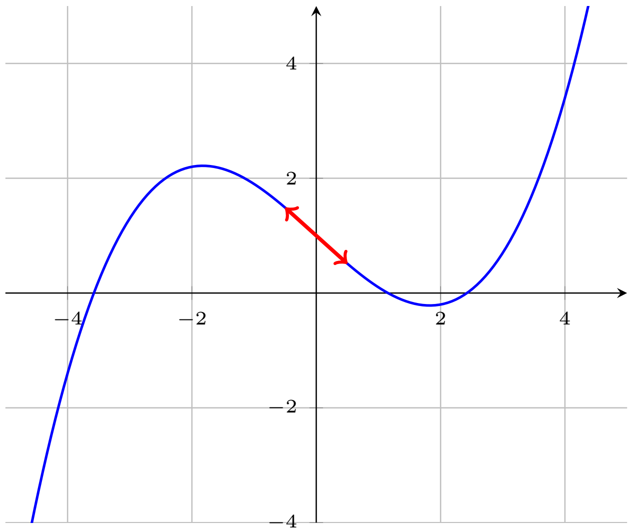
Proposition 21 (Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante.*

Remarque Une deuxième interprétation géométrique de la convexité d'une fonction f dérivable est de dire que la courbe de f est toujours au dessus de ces tangentes.



Proposition 22 (Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$).
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

Définition (Point d'inflexion)
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que f admet un *point d'inflexion* au point $x_0 \in]a, b[$ si la fonction change de nature de convexité au point x_0, autrement dit si f est convexe sur $]a, x_0[$ et concave sur $]x_0, b[$ ou bien si f est concave sur $]a, x_0[$ et convexe sur $]x_0, b[$.



Remarque Pour une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. de classe $\mathcal{C}^2$), un point d'inflexion est un point où la dérivée change de monotonie (resp. où la dérivée seconde s'annule et change de signe).

Exemple 13
La fonction $x \to x^3$ admet un point d'inflexion en 0.

Application
Montrons que la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$ admet un point d'inflexion sur $]0, +\infty[$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. On peut calculer sa dérivée et sa dérivée seconde.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln(x) + x \\ f''(x) &= 2\ln(x) + 3 \end{aligned}$$

On cherche à déterminer le signe de $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) \leqslant 0 &\iff 2\ln(x) + 3 \leqslant 0 \\ &\iff \ln(x) \leqslant -\frac{3}{2} \\ &\iff x \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} && \text{(\textit{car la fonction} exp \textit{est strictement croissante sur} } \mathbb{R}\text{)} \end{aligned}$$

On a donc $f''(x) \leqslant 0$ pour $x \in]0, \mathrm{e}^{-3/2}[$, donc f est concave sur cet intervalle.
De plus, $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in]\mathrm{e}^{-3/2}, +\infty[$, donc f est convexe sur cet intervalle. f admet donc un point d'inflexion en $\mathrm{e}^{-3/2}$.

IV. Allure d'une courbe

Définition (Asymptote horizontale, verticale)
Soit f une fonction définie sur I, soit $x_0 \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une *asymptote horizontale en* $+\infty$ si la fonction f admet une limite finie en $+\infty$. De plus, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe.
- On dit que f admet une *asymptote horizontale en* $-\infty$ si la fonction f admet une limite finie en $-\infty$. De plus, si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe.
- On dit que f admet une *asymptote verticale en* x_0 si la limite à gauche ou la limite à droite en x_0 de f est infinie (i.e. égale à $\pm\infty$). Dans ce cas, la droite d'équation $x = x_0$ est appelée asymptote verticale à la courbe.

Définition (Asymptote oblique)
Soit f une fonction définie sur I.

- On dit que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ s'il existe a et b deux réels (tels que $a \neq 0$) tels que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0.$$
- On dit que f admet une asymptote oblique en $-\infty$ s'il existe a et b deux réels (tels que $a \neq 0$) tels que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Dans les deux cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée asymptote oblique à la courbe.

IV.1. Étude de la fonction

La première chose que l'on doit faire lorsqu'il s'agit de tracer une courbe est de dire le maximum de choses sur la fonction :

1. Quelle est le domaine de la fonction f ? Est-elle prolongeable en certains points par continuité ? Limite aux bords du domaine ; admet-elle des asymptotes verticales ou horizontales ?
2. Si la fonction a une limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$, on pourra parfois demander le profil de la fonction. Pour cela, on regarde la limite
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
Si cette limite est nulle, alors la fonction croît moins vite que la fonction $x \mapsto x$. On aura un profil du type $x \mapsto \sqrt{x}$ ou $x \mapsto \ln(x)$.
Si cette limite est infinie, alors la fonction croît plus vite que la fonction $x \mapsto x$. On aura un profil du type $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
Si cette limite est égale à $a \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction croît comme la fonction $x \mapsto ax$. On aura donc une *asymptote oblique* du type $y = ax + b$. Pour trouver la valeur de b, on regardera la limite
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax.$$
3. On regarde les variations de f : on dresse un tableau de variation et on localise
   - les points où la fonction s'annule,
   - les points où la dérivée s'annule (i.e tangentes horizontales),
   - les extrema locaux, potentiellement les demi-tangentes et tangentes verticales,
   - les points où la dérivée seconde s'annule (i.e. potentiels points d'inflexions).
4. On finit par tracer l'allure en essayant de renseigner toutes les informations que l'on a sur la fonction.

IV.2. Exemple

On souhaite tracer l'allure de la courbe $f : x \mapsto \big(1 + x + |x|\big)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}^*$. On écrit la fonction par morceaux

$$f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ (2x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi f est bien continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit et composée de fonctions continues. Regardons la limite à gauche et à droite en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

On a donc une asymptote verticale en 0 et f admet une limite à gauche en 0.
Regardons les limites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

On a donc une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 1$.

2. Si on veut aller plus loin, on peut regarder le profil de la fonction en $+\infty$. Regardons la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} (2 + \frac{1}{x})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 2.$$

On a donc une asymptote oblique. Regardons la limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} 2x(\mathrm{e}^{1/x} - 1) + \mathrm{e}^{1/x} = 3$$

En effet

$$\lim_{x \to +\infty} 2x(\mathrm{e}^{1/x} - 1) = \lim_{y \to 0} 2\frac{\mathrm{e}^y - 1}{y} = 2.$$

La courbe de f admet comme asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2x + 3$.

3. Calculons la dérivée de f

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ \\ \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On peut alors dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$	↗	$+\infty$

En 0, on peut se demander combien vaut la pente de la demi-tangente à gauche. Pour cela, on regarde

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x} = \lim_{y \to -\infty} y\mathrm{e}^y = 0.$$

On a donc une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

On peut aussi dériver une autre fois pour regarder la convexité de la fonction et d'éventuels points d'inflexion :

On va regarder sur $]-\infty, 0[$ (on admettra que la fonction est convexe sur $]0, +\infty[$). La dérivée seconde de f sur $]-\infty, 0[$ vaut

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{e}^{1/x} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{si } x < -1/2, \\ f''(x) = 0 & \text{si } x = -1/2, \\ f''(x) < 0 & \text{si } -1/2 < x < 0. \end{cases}$$

Le point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ est un point d'inflexion et la fonction est convexe pour $x < -1/2$ et concave pour $x \in]-1/2, 0[$.

4. Traçons !