Fonctions de deux variables

Le but de ce chapitre est d'étudier les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour cela, nous avons besoin de définir certaines notions géométriques relatives au plan $\mathbb{R}^2$.

I. Topologie dans le plan $\mathbb{R}^2$

I.1. Distance euclidienne

Définition

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$.
On appelle **distance euclidienne** entre A et B, la quantité notée $\mathrm{d}(A, B)$ définie par :

$$\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}\big((x_A, y_A), (x_B, y_B)\big) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Commentaire

Si $O = (0, 0)$ est l'origine du plan, et $M = (x, y)$ est un point du plan, alors la distance de M à l'origine est donnée par $\mathrm{d}(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition 1 (Propriétés de la distance euclidienne)**.**

Soient A, B et C trois points du plan $\mathbb{R}^2$.

1) $d(A, B) = d(B, A)$

2) $d(A, B) = 0 \;\Leftrightarrow\; A = B$

3) $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, A)$

Commentaire

Peut-on définir d'autres distances ?

Commentaire

$\mathrm{d}(.,.)$ définit une norme. Peut-on en définir d'autres ?

I.2. Boules

Définition

Soit A un point du plan $\mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B(A,r)$ et défini par :

$$\boxed{B(A,r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{d}(A,M) < r\right\}}$$

- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r, l'ensemble noté $B_f(A,r)$ et défini par :

$$\boxed{B_f(A,r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathrm{d}(A,M) \leqslant r\right\}}$$

Commentaire

On a $B(A,r) \subsetneq B_f(A,r)$ et $B(A,r) \subset B(A,s)$ si $r \leqslant s$.

I.3. Parties bornées

Définition

Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** s'il existe $r \geqslant 0$ tel que $D \subset B(O,r)$. Ceci est équivalent à

$$\mathrm{d}(O,M) \leqslant r, \quad \text{pour tout point } M \text{ de } D.$$

Commentaire

Autrement dit, une partie du plan est bornée lorsqu'elle est contenue dans une boule suffisamment grosse ! Par exemple, un segment est borné, alors qu'une droite n'est pas bornée.

Proposition 2.
Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée.

Démonstration.
Soit M un point de $B_f(A,r)$. On a alors

$$\mathrm{d}(O,M) \leqslant \mathrm{d}(O,A) + \mathrm{d}(A,M) \leqslant \mathrm{d}(O,A) + r.$$

Ainsi, M est un point de $B(O,r')$ avec $r' = \mathrm{d}(O,A) + r$. □

I.4. Parties ouvertes, parties fermées

I.4.a) Parties ouvertes

Définition

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert si :

× $D = \varnothing$,

× ou si pour tout point M de D, il existe $r > 0$ tel que $B(M,r) \subset D$.

Exemple Les ensembles de la forme $]a,b[\, \times\,]c,d[$ sont des ouverts.

Proposition 3.
Une boule ouverte est un ouvert.

Démonstration.
Soit M un point de $B(A,r)$. On a alors $\mathrm{d}(A,M) < r$ et $r' = r - \mathrm{d}(A,M) > 0$. Montrons que $B(M,r') \subset B(A,r)$. Soit N une point de $B(M,r')$. On a alors $\mathrm{d}(M,N) < r'$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\mathrm{d}(A,N) \leqslant \mathrm{d}(A,M) + \mathrm{d}(M,N) < \mathrm{d}(A,M) + r - \mathrm{d}(A,M) = r$$

Ainsi, N est un point de $B(A,r)$. $\square$

Proposition 4.
Le complémentaire d'une boule fermée est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Soit M un point de $B_f(A,r)^{\complement}$. On a alors $\mathrm{d}(A,M) > r$ et $r' = \mathrm{d}(A,M) - r > 0$. Montrons que $B(M,r') \subset B_f(A,r)^{\complement}$. Soit N une point de $B(M,r')$. On a alors $\mathrm{d}(M,N) < r'$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\mathrm{d}(A,M) \leqslant \mathrm{d}(A,N) + \mathrm{d}(N,M),$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{d}(A,N) \geqslant \mathrm{d}(A,M) - \mathrm{d}(N,M) > \mathrm{d}(A,M) - r' = r.$$

Ainsi, N est un point de $B_f(A,r)^{\complement}$. $\square$

⚠ Une boule fermée n'est pas un ouvert.

I.4.b) Parties fermées

Définition
Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite **fermée** si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Commentaire

- Une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- Le plan $\mathbb{R}^2$ est à la fois ouvert et fermé.
- Les ensembles de la forme $[a,b] \times [c,d]$ sont fermés.

II. Fonctions réelles de deux variables réelles

II.1. Définition

Définition

- On appelle **fonction de deux variables à valeurs réelles** toute fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$$f : \left| \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$
- L'ensemble des éléments $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels la fonction est f est définie est appelé **ensemble de définition** de f et est noté $\mathcal{D}_f$.
- On appelle **image de** f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble des éléments $z \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ et $z = f(x,y)$.
$$\operatorname{Im} f = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x,y) \in \mathcal{D}_f, z = f(x,y)\}$$

Exemple

a) On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(3x+2y+1) \end{array} \right.$

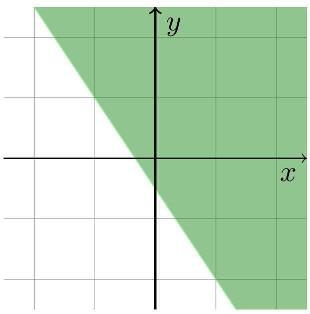
Son ensemble de définition est $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y+1 > 0\}$.
C'est le demi-plan situé sur le côté droit de la droite $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

b) On considère la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} E_2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2-1} \end{array} \right.$

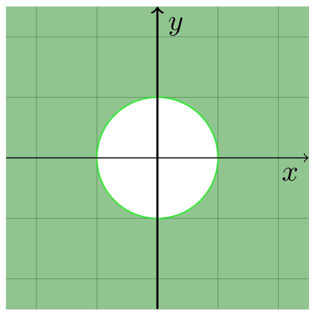
Son ensemble de définition est $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 \geqslant 0\}$.
Afin de caractériser cet ensemble, on remarque tout d'abord que l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est le disque ouvert de centre $(0,0)$ est de rayon 1. L'ensemble E_2 est le complémentaire, dans $\mathbb{R}^2$, de D. Autrement dit, $E_2 = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

c) On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc} E_3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\ \exp(-x^2-y^2) \end{array} \right.$

Son ensemble de définition est $E_3 = \mathbb{R}^2$.



Ensemble de définition de f



Ensemble de définition de g

II.2. Fonctions particulières

II.2.a) Fonctions polynomiales

Définition
Une fonction de deux variables est dite **polynomiale** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$(x, y) \mapsto x^m y^n, \quad \text{avec } m \text{ et } n \text{ deux entiers naturels.}$$

(monôme en deux indéterminées)

Exemple

- La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale.
- La fonction $g : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale.
- La fonction $h : (x, y) \mapsto 1 - x^2$ est polynomiale.
- La fonction $s : (x, y) \mapsto xy$ est polynomiale.

II.2.b) Fonctions coordonnées

Définition
Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont appelées **fonctions coordonnées** ou **projections**. En particulier, ce sont des fonctions polynomiales.

Exemple Faire un dessin

II.3. Représentation graphique

Définition

- Une fonction de deux variables f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ fait correspondre à tout point (x, y) de $\mathcal{D}_f$ un nombre réel $z = f(x, y)$.
- On peut représenter f dans l'espace : c'est la **surface** S_f définie par les points (x, y, z) où $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ et $z = f(x, y)$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** a de f l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x, y) = a$. Autrement dit, une ligne de niveau est l'intersection de S_f et du plan d'équation $z = a$.
- On pourra noter L_f^a la ligne de niveau a de f.

Commentaire

- Une ligne de niveau est une courbe.
  (ligne ne signifie pas droite ...)
- Deux lignes de niveau différentes ne se coupent jamais.
- Sur une carte du relief, on représente les isoplèthes, *i.e.* les lignes joignant des points d'égale altitude.
- Sur une carte météo, on représente souvent les isobares, *i.e.* les lignes joignant des points d'égale pression atmosphérique.
- Lors du tracé, on pourra aussi songer à étudier l'intersection de S_f avec les plans définis par les autres axes : intersection avec les plans d'équation $y = b$ ou $x = c$.

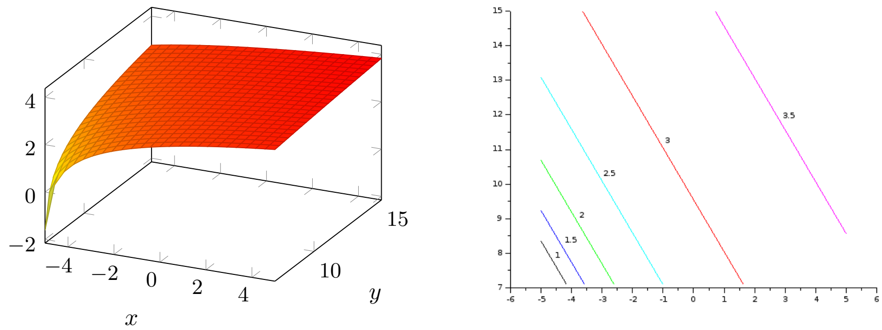
Proposition 5.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables.
S_f est la surface obtenue par réunion de toutes les lignes de niveau de f.

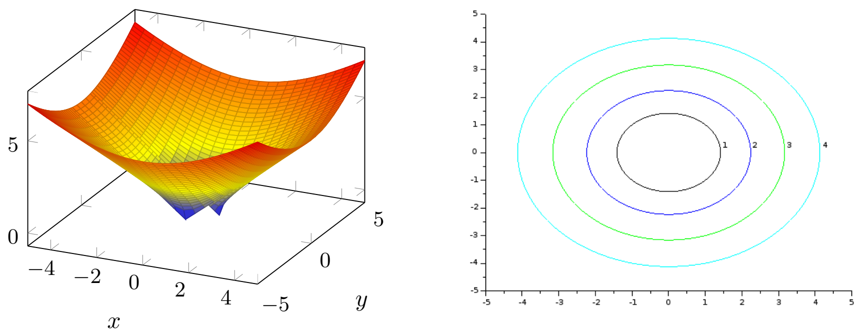
$$\boxed{S_f \;=\; \{L_f^a \mid a \in \operatorname{Im} f\}}$$

Quelques tracés sur les exemples précédents

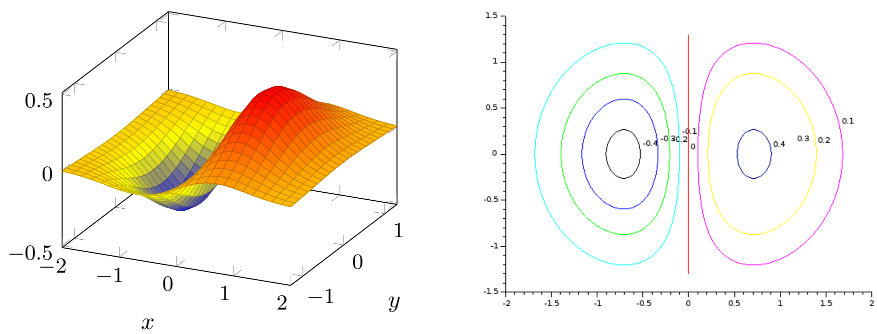
a) Quelques lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = \ln(3x + 2y + 1)$.



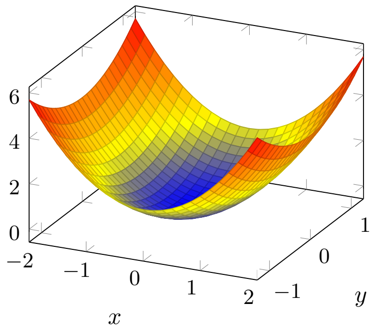
b) Quelques lignes de niveau de la fonction $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.



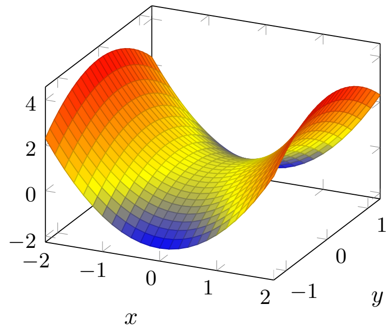
c) Tracé et lignes de niveau de la fonction $h(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$.



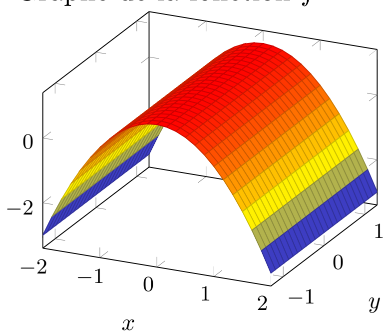
d) On reprend les fonctions polynomiales définies précédemment.



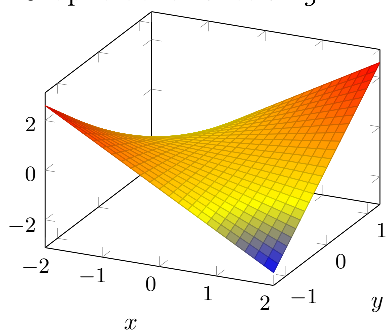
Graphe de la fonction f



Graphe de la fonction g



Graphe de la fonction h



Graphe de la fonction s

III. Continuité d'une fonction de deux variables

III.1. Continuité

Définition *Limite en un point*

Soit f une fonction définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient M_0 un point de D et ℓ un nombre réel.

- On dit que f admet pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ en M_0 si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall M \in D,\ \mathrm{d}(M_0, M) < \eta\ \Rightarrow\ |f(M) - \ell| < \varepsilon}$$

Définition *Continuité*

Soit f une fonction définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit M_0 un point de D.

- On dit que f est **continue en** M_0 si f admet pour limite $f(M_0)$ en M_0, autrement dit si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall M \in D,\ \mathrm{d}(M_0, M) < \eta \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon}$$

- On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

Proposition 6.
Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$.

III.2. Opérations sur les fonctions continues

Théorème 1.
*Soit g une fonction continue sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Soit φ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

Alors la composée $f = \phi \circ g$ est une fonction continue sur D.

Exemple
Montrer que la fonction $f : (x; y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. La fonction $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction g est à valeurs positives.

La fonction $\phi : u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $[0, + + \infty[$. Par composition, on en déduit que $f = \phi \circ f$ est continue. □

Théorème 2.

- *Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sur un ouvert D sont des fonctions continues sur D.*
- *Le quotient de deux fonctions continues sur D est continue si le dénominateur ne s'annule pas sur D.*

Exemple
Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
La fonction $g : (x, y) \mapsto xy$ est polynomiale, et donc définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $h : (x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est polynomiale, et donc définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, nous avons $h(x, y) \geqslant 1$, pour tout couple de réels (x, y), ce qui prouve que h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. □

IV. Calcul différentiel d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables

IV.1. Applications partielles

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble D.

- On appelle **applications partielles** de f en le point (x_0, y_0) les deux fonctions obtenues à partir de f en fixant l'une ou l'autre des variables.
  Plus précisément, f admet deux applications partielles en (x_0, y_0).

  $$\boxed{f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y)}$$

- Ainsi, les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

IV.2. Notion de dérivée partielle d'ordre 1

Définition

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur D.

- Lorsque, l'application partielle $f(., y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0)**.
  On note alors $\partial_1(f)(x_0, y_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\partial_1(f)(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

- Lorsque l'application partielle $f(x_0, .)$ est dérivable en y_0, on dit que f admet **une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0, y_0)**.
  On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ cette dérivée.

$$\boxed{\partial_2(f)(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur D.

- La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x est une fonction réelle à deux variables réelles, notée $\partial_1(f)$.

$$\boxed{\partial_1(f) : (x, y) \mapsto \partial_1(f)(x, y)}$$

  (ne pas confondre le x du ∂x -notation- avec l'abscisse x du point (x, y))

- La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable y est une fonction réelles à deux variables réelles, notée $\partial_2(f)$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

  (ne pas confondre le y du ∂y -notation- avec l'abscisse y du point (x, y))

- On appelle gradient de f et on note $\nabla(f)$ la fonction suivante.

$$\nabla(f) \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Commentaire

- La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à 1 variable réelle. L'ensemble des résultats du chapitre dérivation peut donc être utilisé sur les applications partielles.
- Par exemple, si f et g admettent une dérivée partielle selon x alors $f + g$ et $f \times g$ aussi $(\dots)$
- Les dérivées partielles étant des fonctions à deux variables, elles admettent elles aussi des dérivées partielles !

Proposition 7 (Hors programme)**.** *Soit f une fonction définie sur un* ***ouvert*** *D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de D tel que $\nabla(f)(x_0, y_0) \neq 0$.*

Alors le vecteur $\nabla(f)(x_0, y_0) \neq 0$ est perpendiculaire à la courbe de niveau $f(M_0)$. au point M_0.

Exemple Voici une représentation du gradient de la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

IV.3. Classe C^1 et développement limité à l'ordre 1

Définition
Soit f une fonction définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est **de classe** C^1 si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1, et que chacune de ces dérivées partielles est continue sur D.

Proposition 8.
Toute fonction de classe C^1 est continue.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par

$$f(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur D.

Démonstration.

1. La fonction f est définie si, et seulement si x et y sont strictement positifs. Ainsi, on a $D =]0,++\infty[^2$.
2. Les fonctions $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{y}$, $(x,y) \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto \ln(y)$ sont continues sur D. Par produits et somme, on en déduit que f est continue sur D.
   À $y > 0$ fixé, la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$ est dérivable sur $]0,++\infty$, et il vient
   $$\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2}.$$
   À $x > 0$ fixé, la fonction $f_2 : y \mapsto \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$ est dérivable sur $]0,++\infty$, et il vient
   $$\partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2}.$$
   Les fonctions $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ sont continues sur D. On en déduit que f est de classe C^1 sur D.

$\square$

Proposition 9.
Toute fonction polynomiale est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.
*Soit g une fonction de classe C^1 sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Soit φ une fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$.

Alors la composée $f = \varphi \circ g$ est une fonction de classe C^1 sur D.

Théorème 4.
Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe C^1 sur un ouvert D sont des fonctions de classe C^1 sur D.

Le quotient de deux fonctions de classe C^1 sur D est de classe C^1 si le dénominateur ne s'annule pas sur D.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Montrer que f est de classe C^1 sur D.

Démonstration.

1. La quantité $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ existe si, et seulement si, x et y sont tous les deux non nuls. Ainsi, on a $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
2. Les fonctions $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{y}$ et $(x,y) \mapsto x+y$ sont continues sur D. Par somme et produit, on en déduit que f est continue sur D.
   À $y \neq 0$ fixé, la fonction $f_1 : x \mapsto (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et il vient
   $$\partial_1(f)(x,y) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) - \frac{x+y}{x^2} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}.$$
   À $x \neq 0$ fixé, la fonction $f_2 : y \mapsto (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et il vient
   $$\partial_2(f)(x,y) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) - \frac{x+y}{y^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}.$$
   Les fonctions $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ sont continues sur D. On en déduit que f est de classe C^1 sur D.

□

Théorème 5.
Soit f une fonction de classe C^1 sur un ***ouvert*** *D de $\mathbb{R}^2$.*
Soit un point (x,y) de D.

Alors pour tout couple de réels (h,k) tels que $(x+h, y+k)$ appartiennent à D, on a

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \partial_1(f)(x,y)\cdot h + \partial_2(f)(x,y)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon(h,k), \tag{1}$$

où ε est une fonction continue sur un voisinage de $(0,0)$ et telle que $\varepsilon(0,0) = 0$.

Définition
L'égalité (1) est le **développement limité à l'ordre 1** de f au point (x,y). Il est **unique** et peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y)\cdot\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon(h,k).$$

Commentaire

Quand le gradient est nul en un point, nous n'avons aucune information sur le comportement local de f et nous allons aller chercher l'information à l'ordre 2.

V. Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions de deux variables

V.1. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition
Soit f une fonction définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

- Si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D, alors on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable**, et on la note $\partial^2_{1,1}(f)$.
- Si la fonction $\partial_1(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D, alors on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable**, et on la note $\partial^2_{2,1}(f)$.
- Si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur D, alors on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable**, et on la note $\partial^2_{1,2}(f)$.
- Si la fonction $\partial_2(f)$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable sur D, alors on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable**, et on la note $\partial^2_{2,2}(f)$.

Exemple
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ pour tout couple (x,y) dans l'ouvert $D =]0,+\infty[^2$.
Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et les déterminer.

Démonstration. Nous avons vu que f est de classe C^1 sur D et que ses dérivées partielles d'ordre 1 sont données par

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}. \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}.$$

Ces deux fonctions sont de classe C^1 sur D et admettent des dérivées partielles d'ordre 1. Il vient alors

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{2y}{x^3} \text{ et } \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2},$$

et

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \text{ et } \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \frac{2x}{y^3}.$$

□

Définition Matrice Hessienne
Soit f une fonction définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 2. On appelle **hessienne** de f en (x,y) la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ noté $\nabla^2(f)(x,y)$ et défini par

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}.$$

V.2. Classe C^2

Définition
Soit f une fonction définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est **de classe** C^2 si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2, et que chacune de ces quatre dérivées partielles est continue sur D.

Proposition 10.
Toute fonction de classe C^2 est continue et de classe C^1.

Proposition 11.
Toute fonction polynomiale est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 6.
Soit g une fonction de classe C^2 sur un **ouvert** *D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Soit φ une fonction de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$.

Alors la composée $f = \varphi \circ f$ est une fonction de classe C^2 sur D.

Théorème 7.
Tout combinaisons linéaire et tout produit de fonctions de classe C^2 sur un ouvert D sont des fonctions de classe C^2 sur D.

Le quotient de deux fonctions de classe C^2 sur D est de classe C^2 si le dénominateur ne s'annule pas sur D.

Théorème 8. *Théorème de Schwarz*
Soit f une fonction de classe C^2 sur un **ouvert** *D de $\mathbb{R}^2$. Alors*

$$\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f).$$

Ceci est faux si f n'est pas de classe C^2.

Proposition 12.
Soit f une fonction de classe C^2 sur un **ouvert** *D de $\mathbb{R}^2$. Alors sa matrice Hessienne en tout point est symétrique, et donc diagonalisable.*

V.3. Développement limité d'ordre 2

Théorème 9.
Soit f une fonction de classe C^2 sur un **ouvert** *D de $\mathbb{R}^2$.*
Soit un point (x, y) de D.

Alors pour tout couple de réels (h, k) tels que $(x+h, y+k)$ appartiennent à D, on a

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) =& f(x,y) + \partial_1(f)(x,y)\cdot h + \partial_2(f)(x,y)\cdot k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\partial^2_{1,1}(f)(x,y)\cdot h^2 + 2\partial^2_{1,2}(f)(x,y)\cdot hk + \partial^2_{2,2}(f)(x,y)\cdot k^2\right) + (h^2+k^2)\cdot\varepsilon(h,k), \end{aligned} \tag{2}$$

où ε est une fonction continue sur un voisinage de $(0,0)$ et telle que $\varepsilon(0,0) = 0$.

Définition
L'égalité (2) est le **développement limité à l'ordre 2** de f au point (x, y). Il est **unique** et peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla(f)(x,y)\cdot\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\nabla^2(f)(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\cdot\varepsilon(h,k).$$

Commentaire

Quand le gradient est nul en (x, y), nous avons au voisinage de (x, y)

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) \approx \frac{1}{2}\left(\partial^2_{1,1}(f)(x, y) \cdot h^2 + 2\partial^2_{1,2}(f)(x, y) \cdot hk + \partial^2_{2,2}(f)(x, y) \cdot k^2\right),$$

et nous allons pouvoir comprendre comment f se comporte localement au voisinage de (x, y).

VI. Extrema d'une fonction de deux variables réelles

VI.1. Extremum local d'une fonction de deux variables

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet un **maximum local** en M_0 si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$f(M) \leqslant f(M_0), \text{ pour tout } M \text{ dans } B(M_0, r)$$

  Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $M \in D$.

- On dit que f admet un **minimum local** en M_0 si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$f(M) \geqslant f(M_0), \text{ pour tout } M \text{ dans } B(M_0, r)$$

  Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $M \in D$.

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.

On dit que $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ est un **point critique** de f si :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{autrement dit si : } \partial_1(f)(x_0, y_0) \;=\; 0 \;=\; \partial_1(f)(x_0, y_0)$$

Théorème 10 (*Condition nécessaire d'extremum local*)**.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur un ouvert D.

$$\boxed{f \textit{ admet un extremum local en } M_0 \quad \Rightarrow \quad M_0 \textit{ est un point critique de } f}$$

⚠ Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition **nécessaire** mais **pas suffisante**.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} (x,y) & \mapsto & xy \\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f, et que f n'admet pas d'extremum local en 0.

- La fonction f est polynomiale et admet des dérivées partielles d'ordre 1. On a :

$$\partial_1(f)(x,y) = y \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = x, \text{ pour tout couple de réels } (x,y).$$

- En particulier, on a $\nabla(f)(0,0) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Par ailleurs, on a :

$$-x^2 = f(x,-x) < f(0,0) < x^2 = f(x,x), \text{ pour tout réel } x > 0,$$

ce qui prouve que f n'admet pas d'extremum local en 0.

Théorème 11 (Condition suffisante d'extremum local)**.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.
On suppose que f est de classe C^2 sur un D
Soit (x_0, y_0) un point critique de f.

1)

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement positives	$\Rightarrow$	*f admet un minimum local en (x_0,y_0)*

Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0,y_0).

2)

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement négatives	$\Rightarrow$	*f admet un maximum local en (x_0,y_0)*

Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0,y_0).

3)

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont non nulles et de signes opposés	$\Rightarrow$	*f n'admet pas d'extremum local en (x_0,y_0)*

Dans ce cas, on dira que f admet un **point selle** *ou* **point col***.*

Commentaire

Si au moins une valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure.

Exemple

1) Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$.
- La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
  Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = 2x \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = 2y$$

- Le seul point critique de f est donc $(0,0)$.
  Calculons la matrice hessienne de f en $(0,0)$.

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

- On a donc $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et la seule valeur propre de $\nabla^2(f)(0,0)$ est $2 > 0$. La fonction f admet un minimum local en $(0,0)$, ce qui est cohérent avec le graphe de f.

2) Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
  Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:
  $$\partial_1(f)(x,y) = 2x \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = -2y$$
- Le seul point critique de f est donc $(0,0)$.
  Calculons la matrice hessienne de f en $(0,0)$.
  $$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$
- On a donc $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, et les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont non nulles et de signe opposé. La fonction f admet un point selle en $(0,0)$ ce qui est cohérent avec le graphe de f.

3) Déterminer puis étudier les points critiques de $f(x,y) = xy$.

- La fonction f est polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons
  $$\partial_1(f)(x,y) = y \text{ et } \partial_2(f)(x,y) = x, \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$
  Le seul point critique de f est donc $(0,0)$.
- Calculons la matrice hessienne de f en $(0,0)$. Nous avons
  $$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$
  On a donc $H = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant de $H - \lambda I$ est donné par $\lambda^2 - 1$, et on déduit que $H - \lambda I$ n'est pas inversible si, et seulement si, λ vaut -1 ou 1. Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont -1 et 1 qui sont non nulles et de signe opposé.
  La fonction f admet un point selle en $(0,0)$ ce qui est cohérent avec le graphe de f.

Théorème 12 (Condition suffisante d'extremum local (Hors programme))**.**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.
On suppose que f est de classe C^2 sur un D
Soit (x_0, y_0) un point critique de f.
Soit : $\Delta = \partial_1(f)(x_0,y_0) \times \partial_2(f)(x_0,y_0) \ - \ \left(\partial^2_{1,2}(f)(x_0,y_0)\right)^2$.

1) *Si $\Delta > 0$ alors f admet un extremum local au point (x_0,y_0).*
   - ***a.*** *Si $\partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0) > 0$, c'est un minimum.*
   - ***b.*** *Si $\partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0) < 0$, c'est un maximum.*

2) *Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local au point (x_0,y_0).*

3) *Si $\Delta = 0$, on ne peut pas conclure.*

1)	*Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement positives*	$\Rightarrow$	*f admet un minimum local en (x_0,y_0)*

2)	*Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0,y_0)$ sont strictement négatives*	$\Rightarrow$	*f admet un maximum local en (x_0,y_0)*

3)	*Les valeurs propres de* $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ *sont non nulles et de signes opposés*	$\Rightarrow$	f *n'admet pas d'extremum local en* (x_0, y_0)

Dans ce cas, on dira que f *admet un* **point selle** *ou* **point col**.

Commentaire

- Ce résultat n'apparaît pas dans le BO en tant que tel.
- Connu sous le nom : $rt - s^2$ (notation de Monge).

VI.2. Extremum global

Théorème 13.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un ensemble* D.

1) f *est continue sur* D *2)* D *est fermé borné*	$\Rightarrow$	f *est bornée et atteint ses bornes sur* D

Exemple
On considère la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = x + 1 + 2\mathrm{e}^x$$

ainsi que la fonction f de deux variables réelles x et y définie par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x).$$

1) Étudier les variations de g et donner les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Il vient

$$g'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^x \geqslant 1, \text{ pour tout réel } x.$$

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par somme, nous avons

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

2) Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et donner la position de la courbe représentative de g par rapport à cette asymptote.

Nous avons

$$\lim_{x \to -+\infty} [g(x) - x - 1] = 0,$$

ce qui prouve que g possède une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $- + \infty$. Du fait que $g(x) - x - 1 = 2\mathrm{e}^x > 0$, on en déduit que la courbe représentative de g est au dessus de son asymptote.

3) Déduire des variations de g l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $g(\alpha) = 0$. (on rappelle que $\mathrm{e} \approx 2,7$)

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et grâce au calcul de ses limites à l'infini, nous avons $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
  D'après le théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe un unique α réel tel que $g(\alpha) = 0$.
- Par ailleurs, nous avons $g(-2) \approx -1 + \frac{2}{(2{,}7)^2} < 0$ et $g(-1) = 2\mathrm{e}{-1} > 0$ Par stricte croissance de g et le fait que $g(-2) < g(\alpha) < g(-1)$, nous en déduisons que α est compris entre -2 et -1.

4) Déterminer le seul point critique de f.

- La fonction $(x,y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
  Par composition, on en déduit que $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction $(x,y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Par somme et produit, on en déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Déterminons ses dérivées partielles d'ordre 1. Il vient

$$\partial_1(f)(x,y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + 1 + 2\mathrm{e}^x),$$

  et

$$\partial_2(f)(x,y) = 2y\mathrm{e}^x.$$

  Le point (x,y) est un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x(x + y^2 + 1 + 2\mathrm{e}^x) = 0, \\ 2y\mathrm{e}^x = 0, \end{cases}$$

  ce qui est équivalent à, du fait que $\mathrm{e}^x > 0$,

$$\begin{cases} g(x) = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha, \\ y = 0, \end{cases}$$

  Le seul point critique de f est donc $(\alpha, 0)$.

5) Vérifier que f présente un extremum local β en ce point. Est-ce un maximum ou un minimum ?

Déterminons la matrice hessienne de f en $(\alpha, 0)$. Nous avons

$$\partial_{1,1}(f)(x,y) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + 1 + 2\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x(x + y^2 + 2 + 2\mathrm{e}^x),$$

$$\partial_{2,1}(f)(x,y) = 2y\mathrm{e}^x, \quad \partial_{1,2}(f)(x,y) = 2y\mathrm{e}^x \quad \partial_{2,2}(f)(x,y) = 2\mathrm{e}^x.$$

On en déduit que

$$\nabla^2(f)(\alpha,0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\alpha(1 + \mathrm{e}^\alpha) & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}^\alpha \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale et ses valeurs propres sont toutes deux strictement positives. On en déduit que $(\alpha, 0)$ est un minimum local de f.

6) L'extremum trouvé est-il global ?

Soit $\beta = f(\alpha, 0) = \mathrm{e}^\alpha(\alpha + \mathrm{e}^\alpha)$. En posant $\phi(x) = \mathrm{e}^x(x + \mathrm{e}^x)$, nous avons

$$f(x,y) = \phi(x) + y^2\mathrm{e}^x \geqslant \phi(x), \quad \text{pour tout } (x,y).$$

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\phi'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$. on en déduit que ϕ' est du signe de g, puis que ϕ admet un minimum en α valant β. Nous avons donc

$$f(x,y) \geqslant \phi(x) \geqslant \phi(\alpha) = \beta = f(\alpha, 0), \quad \text{pour tout } (x,y),$$

ce qui prouve que f admet un minimum global en $(\alpha, 0)$.

Exercice *(d'après* `ECRICOME 2000`*)*
T est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations :

$$x \geqslant \frac{1}{4};\ y \geqslant \frac{1}{4};\ x+y \leqslant \frac{3}{4}$$

On note T' « l'intérieur de T » à savoir l'ensemble des couples (x,y) solutions du système d'inéquations :

$$x > \frac{1}{4};\ y > \frac{1}{4};\ x+y < \frac{3}{4}$$

On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que T est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Soit f la fonction définie sur T par : $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur T.

3. ***a)*** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T'.

   b) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.

   c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur T'.

4. ***a)*** Montrer que le minimum et le maximum de f sont atteints sur :

$$\mathscr{C} = \left\{(x,y) \in T \ ;\ x = \frac{1}{4} \text{ ou } y = \frac{1}{4} \text{ ou } x+y = \frac{3}{4}\right\}.$$

   b) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T :

$$2 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{16}{3}$$

Exemple
On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = x^2 e^x - 1, \quad \text{pour tout réel } x.$$

1. Dresser le tableau de variations de ϕ en précisant la valeur de ϕ en 0 et les limites en $-+\infty$ et $++\infty$.

2. Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x > 0$, possède une unique solution, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]1/2, 1[$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et la fonction g définie sur U par

$$g(x,y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y, \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dand } U.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.

2. Calculer les dérivées premières de g sur U.

3. Montrer que g admet deux, et seulement deux, points critiques qui sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$.

4. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

5. Est-ce g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

6. Est-ce g admet un extremum global sur U ?