Espaces vectoriels

I. Définitions

Un espace vectoriel est un ensemble sur lequel on peut ajouter les éléments entre eux (addition interne) et multiplier les éléments par un nombre réel (produit externe). Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition (Espace vectoriel)
On dit qu'un ensemble E est un *espace vectoriel* si

1. Addition interne :
   - (Stabilité) $\forall u, v \in E,\ u + v \in E$,
   - (Associativité) $\forall u, v$ et $w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$,
   - (Commutativité) $\forall u$ et $v \in E,\ u + v = v + u$,
   - (Elément neutre) $\exists\ 0_E \in E$ tel que $\forall u \in E,\ u + 0_E = 0_E + u = u$,
   - (Opposé) $\forall u \in E, \exists v \in E,\ u + v = v + u = 0_E$.
2. Produit extérieur :
   - (Stabilité) $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot u \in E$,
   - (Associativité) $\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$,
   - (Distributivité) $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot u & = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \\ \lambda \cdot (u + v) & = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \end{cases},$
   - (Elément neutre) $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$.

L'élément 0_E est appelé *vecteur nul*.

Commentaire

Vocabulaire
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- On parle aussi de **$\mathbb{R}$-espace vectoriel**. À notre niveau, on pourra même omettre le $\mathbb{R}$ et parler simplement d'espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés **vecteurs**.
- Afin de faire la différence entre réels et vecteurs on note souvent les vecteurs à l'aide d'une flèche : $\overrightarrow{x}$.
- Les réels participant à la multiplication externe sont parfois appelés des **scalaires**.
  On parle aussi de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi $\cdot$

Exemples

- Les ensembles $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\}$ sont des premiers exemples d'espaces vectoriels. Plus généralement $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 1$ est un espace vectoriel : ces éléments, les n-uplets sont appelés vecteurs. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le n-uplet de 0.
- Plus généralement, pour tout $m,n \geqslant 1$, l'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle $0_{m,n}$. On pourrait (**mais on ne le fera pas !**) identifier l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes de taille n avec l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des vecteurs de taille n. On parlera de vecteurs colonnes pour $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et de vecteurs lignes pour $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^3 \;=\; \{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \;\simeq\; \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \;=\; \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

- On verra plus tard dans l'année d'autres exemples plus exotiques : l'ensemble des polynômes de degré n, l'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des suites qui convergent vers 0...

Exercice 1
L'ensemble des fonctions positives réelles muni des lois $+$ et $\cdot$ habituelles sur les fonctions est-il un espace vectoriel ?

Définition (Sous-espace vectoriel)
Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un *sous- espace vectoriel* de E si :

- $F \subset E$,
- $0_E \in F$,
- $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u + \lambda \cdot v \in F$.

Commentaire

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Dans la pratique, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on vérifiera qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel tel que $\mathbb{R}^n, \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}), ...$

⚠ Un espace vectoriel n'est jamais vide ! Il contient toujours un vecteur nul.

Application

1. Montrons que l'ensemble $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x+y+z=0\}$ est un espace vectoriel.

- Tout d'abord, on identifie que F est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition.
  Donc $F \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,
- On vérifie que le vecteur nul appartient à F : le vecteur nul est le vecteur tel que $x=0, y=0$ et $z=0$, or $0+0+0=0$ donc :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F.$$

- Soit $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de F et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que le vecteur $w = u + \lambda \cdot v$ appartient à F. On écrit :

$$w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = u + \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ y_1 + \lambda y_2 \\ z_1 + \lambda z_2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $x_3 + y_3 + z_3 = 0$,

$$x_3 + y_3 + z_3 = x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2 = \underbrace{x_1 + y_1 + z_1}_{=0 \text{ car } u \in F} + \lambda \cdot (\underbrace{x_2 + y_2 + z_2}_{=0 \text{ car } v \in F}) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $w \in F$.

2. Montrons que l'ensemble $G = \{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel.

- Tout d'abord, on identifie que G est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: $G \subset \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,
- On vérifie que le vecteur nul appartient à G : en effet, pour $x = 0$, on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in G$.
- Soient u et v deux vecteurs de G. Autrement dit, il existe x_1 et x_2 tel que :

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifions que le vecteur $w = u + \lambda \cdot v$ appartient à G. On écrit :

$$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ -(x_1 + \lambda x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } x_3 = x_1 + \lambda x_2.$$

Donc w est bien de la forme $\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}$, donc $w \in G$.

Commentaire

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ sont $\{0_{2,1}\}$, $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et toutes les droites qui passent par 0.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont $\{0_{3,1}\}$, $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, toutes les droites qui passent par 0 et tous les plans qui passent par 0.

Proposition 1.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire d'équations homogène à n inconnues

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & + \cdots & +a_{1,n}x_n & = 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & + \cdots & +a_{2,n}x_n & = 0 \\ & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & + \cdots & +a_{m,n}x_n & = 0 \end{array} \right.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve.
On écrit matriciellement le système homogène : on obtient que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est solution du système ssi

$$AX \;=\; 0, \qquad \text{avec} \qquad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système et on vérifie que $\mathcal{S}$ satisfait les conditions d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- On sait déjà que $\mathcal{S} \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
- Le système est homogène, on sait donc que le vecteur nul est toujours solution : $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.
- Soient X et X' deux vecteurs solutions du système et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $X + \lambda \cdot X'$ est aussi solution :
$$A\big(X + \lambda \cdot X'\big) = \underbrace{AX}_{=0 \text{ car } X\in\mathcal{S}} + \lambda \cdot \underbrace{AX'}_{=0 \text{ car } X'\in\mathcal{S}} = 0.$$

$\mathcal{S}$ est donc bien un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. □

Proposition 2.
Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous- espaces vectoriels de E.
Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

Preuve.

- On a $(F \cap G) \subset F \subset E$.
- Comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$, alors $0_E \in F \cap G$.
- Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Si u et $v \in F \cap G$, alors u et $v \in F$.
  Comme F est un sous-espace vectoriel, on a alors que $u + \lambda \cdot v \in F$.
  De même, comme G est un sous-espace vectoriel de E, $u+\lambda\cdot v \in G$. On en déduit que $u+\lambda\cdot v \in F\cap G$. □

⚠ L'union de deux espaces vectoriels n'est pas (en général) un espace vectoriel !

Définition (Combinaison linéaire)
Soit E un espace vectoriel et $u_1, \dots, u_p$ p vecteurs de E.
On dit que v est une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tel que :

$$v \;=\; \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \;=\; \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Les (λ_i) sont appelés *coefficients* de la combinaison linéaire.
On appelle *combinaison linéaire triviale*, la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont pris égaux à 0.

Commentaire

Le vecteur nul est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs (en prenant par exemple la combinaison linéaire triviale).

⚠ On peut avoir plusieurs combinaisons linéaires qui donnent le même vecteur v.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Application
Pour montrer qu'un vecteur donné est une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs donnée, on se ramène à résoudre un système linéaire et à montrer qu'il existe au moins une solution. Par exemple, on veut montrer que le vecteur

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. Pour cela, on cherche au moins un triplet (λ, μ, ν) de réels tels que :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2\mu + 3\nu \\ \lambda + 2\mu - \nu \\ \lambda - \mu + 2\nu \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda & - & 2\mu & + & 3\nu & = & 4 \\ \lambda & + & 2\mu & - & \nu & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & + & 2\nu & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda & - & 2\mu & + & 3\nu & = & 4 \\ & & 4\mu & - & 4\nu & = & -4 \\ & & \mu & - & \nu & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda & - & 2\mu & + & 3\nu & = & 4 \\ & & \mu & - & \nu & = & -1 \end{array} \right.$$

Les triplets solutions (λ, μ, ν) de ce systèmes sont donc $\{(2 - \nu, -1 + \nu, \nu) \mid \nu \in \mathbb{R}\}$, il y a donc au moins une solution : v est donc une combinaison linéaire des trois autres vecteurs.

Définition (Sous-espace vectoriel engendré)
Soient $u_1, \ldots, u_p$ p vecteurs de E. On note :

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$$

l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Autrement dit :

$$v \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \ = \ v$$

Proposition 3.
Soit E un espace vectoriel et soient $u_1, \ldots, u_p$ p vecteurs de E.
Alors $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ *est un sous espace vectoriel de E.*

Preuve.

- $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) \subset E$: Soit $v \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$, alors :

  $$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ v = \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \in E$$

  par propriétés de stabilité de l'espace vectoriel E.
  Ainsi $v \in E$ et donc $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) \subset E$.
- $0_E \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$: 0_E est une combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_p$ en prenant :

  $$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \ = \ (0, \ldots, 0).$$

  Donc $0_E \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

- Soit $(v,w) \in \big(\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)\big)^2$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifions que $(v+\alpha\cdot w) \in \text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.
Comme $(v,w) \in \big(\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)\big)^2$, alors :

$$\begin{cases} \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p, & v = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \\ \exists(\mu_1,\dots,\mu_p) \in \mathbb{R}^p, & v = \sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k u_k \end{cases}$$

donc :

$$v + \alpha\cdot w \;=\; \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\cdot u_k + \alpha\cdot \sum_{k=1}^{p} \mu_k\cdot u_k \;=\; \sum_{k=1}^{p} \big(\lambda_k + \alpha\times\mu_k\big)\cdot u_k \;\in\; \text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$$

L'ensemble $\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est donc un sous espace vectoriel de E.

□

Commentaire

Si v est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\dots,u_p$, alors :
$\text{Vect}(v,u_1,\dots,u_p) = \text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

Commentaire

En fait, on peut voir $\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ comme le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $u_1,\dots,u_p$.

Exemple

Montrons que l'ensemble $G = \{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que :

$$\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. D'où G est un sev de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

⚠ On ne change pas le sev engendré par une famille :

1. en changeant l'ordre des vecteurs de la famille ;
2. en substituant au vecteur u_i le vecteur $\ell\cdot u_i$, pour $\ell \in \mathbb{R}^*$;
3. en substituant au vecteur u_i le vecteur $u_i + \ell\cdot u_j$, pour $i \neq j$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

1. *Si $u \neq 0_E$, on a* $\text{Vect}(u, 0_E) = \text{Vect}(u)$.
2. *De manière générale, on a :*

$$u_{m+1} \in \text{Vect}(u_1,\dots,u_m) \;\Rightarrow\; \text{Vect}(u_1,\dots,u_m,u_{m+1}) = \text{Vect}(u_1,\dots,u_m)$$

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \text{Vect}(u_1,\dots,\lambda\cdot u_i,\dots,u_m) = \text{Vect}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_m)$

Preuve. **2.** Supposons $u_{m+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$.
Démontrons que $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$.

($\supset$) Évident.

($\subset$) Comme $u \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1})$, alors le vecteur u s'écrit $u = \sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot u_i$.

Or $u_{m+1} \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$, donc $u_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \cdot u_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right) + \lambda_{m+1} \cdot u_{m+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right) + \lambda_{m+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_{m+1}\,\mu_i) \cdot u_i \end{aligned}$$

et donc $u \in \text{Vect}(u_1, \ldots, u_m)$.

$\square$

Exemple
On se sert notamment de ces propriétés pour simplifier l'écriture d'espace engendré par des parties. Par exemple :

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ = \ & \left\{x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ = \ & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ = \ & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ = \ & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ = \ & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

II. Familles génératrices, familles libres, bases

Définition (Famille génératrice)
Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est *génératrice* si :

$$\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \ = \ E.$$

Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$:

$$\forall u \in E, \ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i$$

Lorsque $E = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, on dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ *engendre* E.

Exemples

- La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour le prouver, il faut trouver une combinaison linéaire des trois vecteurs qui permet d'obtenir un vecteur quelconque $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

  Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, cherchons λ, μ, ν tels que :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda\\2\lambda+\mu+\nu\\2\lambda-\mu+\nu\end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} 2\lambda & & & & & = & x \\ 2\lambda & + & \mu & + & \nu & = & y \\ 2\lambda & - & \mu & + & \nu & = & z \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{ccccccl} 2\lambda & & & & & = & x \\ & & \mu & + & \nu & = & -x + y \\ & - & \mu & + & \nu & = & -x + z \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccl} 2\lambda & & & = & x \\ & \mu & + \nu & = & -x + y \\ & & 2\nu & = & -2x + y + z \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{cccl} 2\lambda & & & = x \\ & 2\mu & & = y - z \\ & & 2\nu & = -2x + y + z \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1,\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\iff}} \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} x \\[2mm] \mu = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z \\[2mm] \nu = -x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \end{array}\right.$$

  Donc :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{x}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \left(-x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

- Cependant, la famille $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\right)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour le prouver, il suffit de donner un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui n'est pas combinaison linéaire des trois vecteurs. Par exemple :

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \notin \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\right).$$

Proposition 5.
Soit E un espace vectoriel et soient $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_q)$ deux familles de vecteurs de E. Alors, si $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice, $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est aussi génératrice.

Commentaire

Si une famille de vecteurs admet une sous-famille génératrice, la famille est alors elle-même génératrice.

Définition (Famille libre)
Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- On dit que la famille est *libre* si pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\text{si } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot u_k \ = \ 0, \qquad \text{alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

- On dit alors que les vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ sont *linéairement indépendants* : aucun des u_i ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire (non triviale) des autres vecteurs.
  (la seule relation de dépendance linéaire entre les u_i est la relation triviale)
- Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite *liée*.

Commentaire

Si une famille de vecteurs est libre alors la seule manière d'obtenir le vecteur nul comme combinaison linéaire de la famille est de prendre la combinaison linéaire triviale : *i.e.* tous les coefficients égaux à 0.
Inversement, une famille de vecteurs est liée s'il existe une combinaison linéaire non triviale qui donne le vecteur nul.

Commentaire

Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.

Commentaire

Une famille de vecteurs dont l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres est une famille liée. Par exemple, une famille (u, v, w) de vecteurs telle que :

$$w \ = \ 3 \cdot u - 2 \cdot v$$

est liée car :

$$3 \cdot u - 2 \cdot v - 1 \cdot w \ = \ 0.$$

On a donc trouvé une combinaison non triviale qui donne le vecteur nul.

Commentaire

Pour deux vecteurs, on pourra dire colinéaires au lieu de liés (et non colinéaires pour libres).

Application
Dans la pratique, pour montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre/liée, on résout un système homogène en les inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$:

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si le système admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, alors la famille est libre, sinon, elle est liée.

1. La famille suivante est-elle libre ? $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad & \iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ \lambda & + & 2\,\mu & + & \nu & = & 0 \\ & & \mu & - & \nu & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0 \\ & & \mu & & & = & 0 \\ & & \mu & - & \nu & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & + & 2\,\mu & & & = & 0 \\ & & \mu & & & = & 0 \\ & & & - & \nu & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \mu = \nu = 0 \\ \textit{(par remontées successives)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille est donc libre.

2. La famille suivante est-elle libre ? $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & - & \nu & = & 0\\ 3\,\lambda & + & \mu & - & \nu & = & 0\\ \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & - & \nu & = & 0\\ & & \mu & + & 2\,\nu & = & 0\\ & & \mu & + & 2\,\nu & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & & & - & \nu & = & 0\\ & & \mu & + & 2\,\nu & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \nu\\ \mu & = & -2\,\nu\end{array}\right.$$

En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(\lambda,\ \mu,\ \nu) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda = \nu \texttt{ ET } \mu = -2\,\nu\} \\ &= \{(\nu,\ -2\,\nu,\ \nu) \mid \nu \in \mathbb{R}\} = \{\nu \cdot (1,\ -2,\ 1) \mid \nu \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,((1,\ -2,\ 1)) \end{aligned}$$

On a donc une infinité de solutions, on peut en particulier en choisir une pour donner une combinaison non triviale des vecteurs qui donne le vecteur nul. Par exemple pour $\nu = 1$, on a $\lambda = 1$ et $\mu = -2$, ce qui revient à dire :

$$(1,\ 3,\ 1) - 2 \cdot (0,\ 1,\ 1) + (-1,\ -1,\ 1) = (0,\ 0,\ 0)$$

La famille est liée.

Commentaire

Parfois, il est possible qu'une combinaison linéaire non triviale donnant le vecteur nul « saute aux yeux ». Dans ce cas, on peut montrer qu'une famille est liée plus simplement.

Par exemple : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est liée car :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Proposition 6.
Soit E un espace vectoriel.
Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille **libre** *de vecteurs.*
Si un vecteur $u \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $(u_1, \dots, u_p)$ alors cette combinaison linéaire est unique.

Preuve.
Supposons que u s'écrive à l'aide de deux combinaisons linéaires de $(u_1, \dots, u_p)$.
Autrement dit, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

× $u = \lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_p \cdot u_p$

× $u = \mu_1 \cdot u_1 + \dots + \mu_p \cdot u_p$

Par soustraction, on obtient :

$$0_E = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot u_1 + \dots + (\lambda_p - \mu_p) \cdot u_p$$

Comme $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre, cette relation de dépendance linéaire est la relation triviale.
Autrement dit, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, *i.e.* $\lambda_i = \mu_i$. □

Proposition 7.
Soit E un espace vectoriel et soient $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_q)$ deux familles de vecteurs de E.
Alors, si $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est libre, $(u_1, \dots, u_p)$ est aussi libre.

Commentaire

Toute sous-famille d'une famille libre de vecteurs est elle-même libre.

Définition (Base)
Soit E un espace vectoriel.
On appelle base de E toute famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.

Commentaire

Si F est un sous-espace vectoriel de E, une base de F est une famille de vecteurs de F qui est libre et génératrice de F.

Théorème 1.
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E.
Alors, pour tout vecteur $v \in E$, il existe une unique combinaison linéaire de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ valant v :

$$\exists\,!\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k.$$

Les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelés coordonnées du vecteur v dans la base $(u_1, \dots, u_n)$.

Preuve.
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et soit v un vecteur de E.
Montrons qu'il existe une combinaison linéaire des (u_i) qui donne v et que cette combinaison est unique.

- Existence :
  La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base, donc est génératrice : $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n) = E$.
  Donc $v \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_n))$, ce qui signifie par définition qu'il existe une combinaison linéaire des $(u_1, \dots, u_n)$ qui donne v.
- Unicité :
  Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :
  $$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k \quad \text{et} \quad v = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot u_k.$$
  donc :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot u_k \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot u_k = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) \cdot u_k = 0_E \end{aligned}$$
  Comme la famille est libre, seule la combinaison linéaire triviale permet d'obtenir 0, donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda_k = \mu_k$. La combinaison linéaire est donc unique.

□

Théorème 2 (Théorème de la base incomplète (HP))**.**
Soit E un espace vectoriel.

- *Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.*
- *De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.*

Corollaire 1.
Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E possède dans E un sous-espace supplémentaire.

Preuve.
Soit $\mathcal{B}$ une base de F.
La base $\mathcal{B}$ est donc en particulier une famille libre de F, donc une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{B}'$ de E.
L'espace engendré par les vecteurs de $\mathcal{B}'$ qui ne sont pas des vecteurs de $\mathcal{B}$ est un supplémentaire de F dans E. □

III. Espace vectoriel de dimension finie

III.1. Bases canoniques

Pour certains espaces vectoriels d'usage fréquent, on choisit par convention une base assez simple que l'on utilisera souvent. Ce type de base est appelée *base canonique*. Les trois exemples suivants sont à connaître par coeur et il n'est pas nécessaire de redémontrer que ce sont des bases.

Proposition 8 (Base canonique de $\mathbb{R}^n$)**.**
On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e_i de $\mathbb{R}^n$ par :

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} place}, 0, \dots, 0).$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ que l'on appelle base canonique *de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$.

Proposition 9 (Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$)**.**
La famille $(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$, où :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P_i(X) = X^i$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on appelle base canonique *de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Exemple
La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est (P_0, P_1, P_2).
Les coordonnées du polynôme $Q(X) = 2X^2 - X + 3$ dans cette base sont $(3, -1, 2)$.
En effet : $Q = 3 \cdot P_0 + (-1) \cdot P_1 + 2 \cdot P_2$.

Proposition 10 (Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)**.**
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on définit la matrice $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui lui vaut 1.

$$E_{i,j} \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ -\, i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vert \\ j \end{matrix} & \end{array}$$

La famille $(E_{i,j})$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on appelle base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple
La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans cette base sont $(3, 1, 0, -1)$.

III.2. Dimension d'un espace vectoriel

Définition (Espace de dimension finie)
On dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Commentaire

Lorsqu'un espace vectoriel ne possède pas de famille génératrice finie, on dit que cet espace est de dimension infinie. Par exemple, les espaces $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont de dimension infinie.

Théorème 3 (Théorème de la dimension)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$.
Alors E admet une base et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.
Le nombre d'éléments d'une base est appelé dimension de l'espace vectoriel E *et est noté* $\dim(E)$.
Par convention, on dira que l'espace vectoriel $E = \{0\}$ est de dimension 0.

Les dimensions des espaces vectoriels usuels suivants sont à connaître par coeur.

Proposition 11 (Dimensions d'e.v. usuels)**.**

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.
- $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$. *En particulier,* $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$ *et* $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

Application

1. Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour cela on va montrer qu'elle est libre et génératrice :

- Génératrice : Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrons qu'il existe une combinaison linéaire de la famille égale à ce vecteur : on résout en λ, μ, ν le système

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu + \nu &=& x \\ \nu &=& y \\ \lambda + 2\mu + \nu &=& z \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu + \nu &=& x \\ \nu &=& y \\ \mu &=& -x + z \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 2x - y - z \\ \nu &=& y \\ \mu &=& -x + z \end{array}\right.$$

La famille est donc génératrice.

- Libre : Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On obtient alors l'équivalence suivante :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \{\ \lambda = \mu = \nu = 0$$

on peut utiliser la résolution du système qu'on a effectué précédemment pour un second membre $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
La famille est donc libre.

On obtient finalement que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$:

× engendre $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

× est libre.

C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

Pour cela, on résout un système linéaire : cherchons $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda & + & \mu & + & \nu & = & 3 \\ & & & & \nu & = & 2 \\ & & 2\,\mu & + & \nu & = & -1 \end{array} \right.$$

On a déjà résolu ce système, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda & = & 2 \times 3 - 2 - (-1) \\ \nu & = & 2 \\ \mu & = & -3 + (-1) \end{array} \right.$$

Ainsi, les coordonnées de $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont $(5, -4, 2)$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Commentaire

La famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est de cardinal 3, ce qui correspond à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On expliquera plus tard que l'on a juste alors besoin de montrer que la famille est soit libre, soit génératrice. Dans la pratique, montrer qu'une famille est libre est en général plus simple.

Application
Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel exprimé de manière implicite (ou une base de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène) :

- On effectue un pivot de Gauss sur le système à résoudre.
- Une fois le système rendu échelonné, on enlève les équations inutiles.
- Si le système obtenu a autant d'équations que d'inconnues, c'est que le système est de Cramer donc la seule solution est le vecteur nul. Sinon, le système obtenu a moins d'équations que d'inconnues, dans ce cas, on paramétrise l'ensemble des solutions en utilisant certaines des inconnues comme paramètres. Il doit y avoir autant de paramètres qu'il manque d'équations pour que ce système ait autant d'équations que d'inconnues.

On obtient alors une famille de vecteurs générateurs. On vérifie ensuite que la famille est libre.

1. Soit F le sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x + z = 0 \text{ et } z - y = 0\}$. Déterminons une base de F.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in F & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\[1em]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\[1em]
& \overset{\cancel{L_2}}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.
\end{array}$$

On a donc un système échelonné à 2 équations et 3 inconnues : il nous faut donc choisir un paramètre (disons z). On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2\,y & = & z \\ & - & y & = & -z \end{array}\right. \\[1em]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & = & -z \\ & - & y & = & -z \end{array}\right. \\[1em]
& \iff & \left\{\begin{array}{rcr} x & & = -z \\ & y & = z \end{array}\right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
F & = & \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \texttt{ ET } y = z\right\} \ = \ \left\{\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \\[1em]
& = & \left\{z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La famille $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

- × engendre donc F,
- × est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

C'est donc une base de F.

2. Soit G le sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ définie par $G = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x+y+z+t = 0 \texttt{ ET } x+2y-t = 0\}$.

Déterminons une base de G.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{array}{rcl}
X \in G & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & - & 2t & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

On a deux équations, quatre inconnues : on a besoin de deux paramètres (disons z et t). On obtient :

$$
\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & - & z & - & 2t & = & 0 \end{array} \right. & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & = & -z & - & t \\ & & y & = & z & + & 2t \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & = & -2z & - & 3z \\ & & y & = & z & + & 2t \end{array} \right.
\end{array}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{array}{rcl}
G & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -2z - 3t \texttt{ ET } y = z + 2t\} \; = \; \{\begin{pmatrix} -2z-3t \\ z+2t \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\
& = & \{z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \; = \; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}
$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

- × engendre donc G,
- × est libre, car est constituée de deux vecteurs non proportionnels.

C'est donc une base de G.

Exercice 2

Montrer que l'ensemble $S_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \; / \; {}^tM = M\}$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel puis en déterminer une base et sa dimension.

III.3. Propriétés des espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 12.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

1. *Toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.*
2. *Toute famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée.*
3. *Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.*
4. *Toute famille de n vecteurs avec $p < n$ n'est pas génératrice.*

Commentaire

Dans un espace de dimension n, toute famille comportant plus de n vecteurs est donc forcément liée et toute famille comportant moins de n vecteurs n'est jamais génératrice.

Exercice 3

1. La famille $\mathcal{F}_1 = ((1,2),(2,1),(1,1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?
2. La famille $\mathcal{F}_2 = ((1,1,1),(1,2,1))$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^3$?

Théorème 4.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

1. *Toute famille libre de E composée de n vecteurs est une base de E.*
2. *Toute famille génératrice de E composée de n vecteurs est une base de E.*

MÉTHODO

Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace et que l'on se donne une famille de n vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est *soit libre, soit génératrice* pour montrer que c'est une base.
Comme on a le choix, on préférera souvent montrer que la famille est libre (plus simple).
On écrira par exemple :

× La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille libre de E,

× $\mathrm{Card}((e_1,\dots,e_n)) \ = \ n \ = \ \dim(E)$

Donc $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Exemple
Montrons que la famille $\mathcal{F} = (2X+1, X^2-2, 3X-2X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons :
  $$\lambda_1 \cdot (2X+1) + \lambda_2 \cdot (X^2-2) + \lambda_3 \cdot (3X-2X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$
  On obtient les équivalences suivantes :

$$\lambda_1\cdot(2X+1)+\lambda_2\cdot(X^2-2)+\lambda_3\cdot(3X-2X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \ \Leftrightarrow \ (\lambda_2-2\lambda_3)\cdot X^2+(2\lambda_1+3\lambda_3)\cdot X+(\lambda_1-2\lambda_2)\cdot 1 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Ce polynôme admet une infinité de racines. Il est donc identiquement nul. On obtient alors les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ 2\,\lambda_1 & & & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ 2\,\lambda_1 & & & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 4\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 4\,L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 4\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & 11\,\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$

(par remontées successives)

Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

- On obtient alors :
  - × la famille $\mathcal{F}$ est libre,
  - × $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$.

  Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 5.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous- espace vectoriel de E.

- *Alors F est de dimension finie et on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
- *Cas d'égalité :* $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

Commentaire

On utilise souvent le théorème précédent sous la forme suivante.

$$\left.\begin{array}{c} F \subset E \\ \dim(F) = \dim(E) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad F = E.$$

IV. Rang

IV.1. Notion de rang d'une famille de vecteurs

IV.1.a) Définition et propriétés

Définition (Rang)
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle *rang* de la famille $(e_1, \dots, e_p)$, noté $\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p))$ la dimension de $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)$. Ainsi :

$$\mathrm{rg}((e_1, \dots, e_p)) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p)\right)$$

Exemple
On considère la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 3, -3)$, $v = (4, 2, -3)$ et $w = (-1, 7, -6)$.

1. Calculer $-3u + v + w$.

$$-3 \cdot u + v + w \;=\; -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$.

- La famille $\mathcal{F}$ est liée d'après la question précédente.
  La dimension de $\text{Vect}\,(u, v, w)$ est donc au plus 2.
- De plus la famille (u, v) est libre, car les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels.
  Donc la dimension de $\text{Vect}\,(u, v, w)$ est au moins 2.

Finalement la dimension de $\text{Vect}\,(u, v, w)$ est 2, *i.e.* le rang de la famille $\mathcal{F}$ est 2.

Proposition 13.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. $\text{rg}((e_1, \dots, e_p)) \leqslant p$ *($p = \text{Card}((e_1, \dots, e_p))$)*

2. $\text{rg}((e_1, \dots, e_p)) \leqslant n$ *($n = \dim(E)$)*

IV.1.b) Détermination pratique du rang

Proposition 14.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. *Soit $\lambda \neq 0$,* $\text{rg}((e_1, \dots, e_i, \dots, e_p)) = \text{rg}((e_1, \dots, \lambda \cdot e_i, \dots, e_p))$.

2. *Soit $\mu \in \mathbb{R}$,* $\text{rg}((e_1, \dots, e_i, \dots, e_p)) = \text{rg}((e_1, \dots, e_i + \mu \cdot e_j, \dots, e_p))$.

Proposition 15.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

$$e_{r+1} = \dots = e_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad \text{rg}((e_1, \dots, e_p)) \leqslant r$$

Exemples

1. On considère la famille (e_1) constituée d'un unique vecteur. Alors :
- × si $e_1 = 0_E$, alors $\text{rg}((e_1)) = 0$
- × si $e_1 \neq 0_E$, alors $\text{rg}((e_1)) = 1$

2. On considère la famille (e_1, e_2) constituée de 2 vecteurs. Alors :
- × si $e_1 = e_2 = 0_E$, alors $\text{rg}((e_1, e_2)) = 0$.
- × si $e_1 \neq 0_E$ ou $e_2 \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda \cdot e_2$ (*i.e.* si e_1 et e_2 sont colinéaires), alors $\text{rg}((e_1, e_2)) = 1$.
- × si e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, alors $\text{rg}((e_1, e_2)) = 2$.

3. On considère une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de 3 vecteurs ou plus. Alors on simplifie la famille de vecteurs au maximum, grâce aux opérations des Propositions 14 et 15 et on utilise la définition du rang.

IV.2. Notion de rang d'une matrice

IV.2.a) Définition et propriétés

Définition (Rang d'une matrice)

Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle *rang de la matrice A*, noté $\text{rg}(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$. Ainsi :

$$\text{rg}(A) \;=\; \dim(\text{Vect}\,(C_1, C_2, \dots, C_p)).$$

Proposition 16.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. $\text{rg}(A) \leqslant p$

2. $\text{rg}(A) \leqslant n$

3. *Si* A *est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, alors* $\text{rg}(A) = \min(n, p)$

Preuve.
Toutes ces propriétés se démontrent en revenant à la définition du rang d'une matrice. □

IV.2.b) Détermination pratique du rang

Théorème 6.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$\text{rg}(A) \ = \ \text{rg}({}^tA)$$

Preuve.
Admis.
Fait appel aux matrices J_r. □

Proposition 17.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. *En notant* $C_1, \cdots, C_p$ *les colonnes de* A*, alors :*

× $\forall \lambda \neq 0$,

$$\text{rg}(A) \ = \ \text{rg}\left(\begin{pmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ C_1 & \cdots & \lambda \cdot C_i & \cdots & C_p \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{pmatrix}\right)$$

× $\forall \mu \in \mathbb{R}$,

$$\text{rg}(A) \ = \ \text{rg}\left(\begin{pmatrix} | & \cdots & | & \cdots & | \\ C_1 & \cdots & C_i + \mu \cdot C_j & \cdots & C_p \\ | & \cdots & | & \cdots & | \end{pmatrix}\right)$$

Donc les opérations élémentaires sur les colonnes laissent invariant $\text{rg}(A)$.

2. *En notant* $L_1, \cdots, L_n$ *les lignes de* A*, alors :*

× $\forall \lambda \neq 0$,

$$\text{rg}(A) \ = \ \text{rg}\left(\begin{pmatrix} — & L_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \lambda \cdot L_i & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & L_n & — \end{pmatrix}\right)$$

× $\forall \mu \in \mathbb{R}$,

$$\text{rg}(A) \ = \ \text{rg}\left(\begin{pmatrix} — & L_1 & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & L_i + \mu \cdot L_j & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & L_n & — \end{pmatrix}\right)$$

Donc les opérations élémentaires sur les lignes laissent invariant $\text{rg}(A)$, *i.e.* **on peut déterminer** $\text{rg}(A)$ **à l'aide du pivot de Gauss**.

Preuve.

1. On revient à la définition de $\text{rg}(A)$ et on applique la Proposition 14.
2. On applique le Théorème 6, puis on revient à la définition de $\text{rg}({}^tA)$ et on applique la Proposition 14.

□

Proposition 18.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. *Si A possède r colonnes non nulles ($r \leqslant p$), alors $\text{rg}(A) \leqslant r$*
2. *Si A possède r lignes non nulles ($r \leqslant n$), alors $\text{rg}(A) \leqslant r$.*

Commentaire

Si 2 colonnes (resp. 2 lignes) sont proportionnelles, alors, par opération élémentaire (pivot de Gauss), on crée une colonne (resp. une ligne) nulle.

Exemples

1. Si $A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors
   × Si $A = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, alors $\text{rg}(A) = 0$.
   × Si $A \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, alors $\text{rg}(A) = 1$
2. Si $A \in \mathscr{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, alors
   × Si $A = 0_{\mathscr{M}_{n,2}(\mathbb{R})}$, alors $\text{rg}(A) = 0$.
   × Si les 2 colonnes de A sont proportionnelles (et l'une des 2 est non nulle), alors $\text{rg}(A) = 1$.
   × Si les 2 colonnes de A ne sont pas proportionnelles, alors $\text{rg}(A) = 2$.
3. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $p \geqslant 3$, alors on simplifie la matrice A par pivot de Gauss puis on revient à la définition du rang d'une matrice.

Commentaire

On saura adapter les exemples précédents dans les cas $A \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, $A \in \mathscr{M}_{2,p}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 3$.

Exemples
Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

IV.2.c) Intérêt du calcul du rang

Théorème 7.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *A est inversible* $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) = n$
2. *A n'est pas inversible* $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) < n$

V. Récapitulatif de méthodes sur les familles libres, génératrices et bases

MÉTHODO

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- **Liberté d'une famille** : Pour montrer que la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, on dispose de 2 méthodes :
  - ***a)*** Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.
    Supposons :
    $$\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p = 0_E$$
    On doit alors prouver que tous les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont nuls.
  - ***b)*** On montre que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une sous- famille d'une famille libre.
- **Famille liée** : Pour montrer que la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ est liée, on dispose de 3 méthodes :
  - ***a)*** On cherche un jeu de coefficients $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$ non tous nuls tels que :
    $$\lambda_1^* \cdot e_1 + \cdots + \lambda_p^* \cdot e_p = 0_E$$
  - ***b)*** On constate que c'est une sur-famille d'une famille liée.
  - ***c)*** On constate que le cardinal de la famille est strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel E, c'est-à-dire : $p > n$.
- **Famille génératrice** :
  - ***a)*** Pour montrer que la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ engendre l'espace vectoriel E, on prouve que tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_p)$, *i.e.* pour tout $u \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :
    $$u \ = \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$$
  - ***b)*** Pour montrer que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice du sev F de E, on prouve que :
    - ***i.*** $\forall i \in [\![1, p]\!], \ e_i \in F$.
    - ***ii.*** tout vecteur de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_p)$, *i.e.* : pour tout $u \in F$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :
      $$u \ = = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$$
- **Base** : Pour montrer que la famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ est une base, on dispose de 3 méthodes :
  - ***a)*** On prouve que :
    - × la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre,
    - × $\mathrm{Card}((e_1, \dots, e_p)) \ = \ p \ = \ n \ = \ \dim(E)$
  - ***b)*** On prouve que :
    - × la famille $(e_1, \dots, e_p)$ engendre E,
    - × $\mathrm{Card}((e_1, \dots, e_p)) \ = \ p \ = \ n \ = \ \dim(E)$
  - ***c)*** On prouve que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_p)$, *i.e.* : pour tout $u \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^n$ tels que :
    $$u \ = \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$$
- **Coordonnées d'un vecteur dans une base** : Pour trouver les coordonnées d'un vecteur u dans une base $\mathcal{B}$, on écrit le vecteur u sous la forme d'une combinaison linéaire à coefficients quelconques des vecteurs de $\mathscr{B}$. Puis on trouve le jeu de coefficients (souvent par résolution d'un système linéaire).