Dénombrement

I. Petits rappels sur les applications

Définition (Application)
Une relation d'un ensemble E vers un ensemble F est une *application* de E vers F lorsque chaque élément de E a une image et une seule dans F

Définition (Injection)
Une application d'un ensemble E vers une ensemble F est *injective* lorsque deux éléments différents de E ont toujours deux images différentes dans F. Autrement dit, chaque élément de F possède *au plus* un antécédent :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Définition (Surjection)
Une application d'un ensemble E vers un ensemble F est *surjective* lorsque tout élément de F possède *au moins* un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Définition (Bijection)
Une application d'un ensemble E vers un ensemble F est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective, *i.e.* lorsque

- chaque élément de E a une image et une seule dans F,
- chaque élément de F a un antécédent et un seul dans E.

Définition (Bijection réciproque)
Si f est une bijection d'un ensemble E vers un ensemble F, alors l'application g définie par

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y),$$

est une bijection de F vers E. Elle est appelée *bijection réciproque* de f et se note f^{-1}.

MÉTHODO

- **Montrer qu'une application est injective.**
On se donne deux éléments quelconques x et y de E. On écrit l'égalité $f(x) = f(y)$ et on cherche à en déduire l'égalité $x = y$.

Exemples

1. Montrer que l'application suivante est injective :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3. \end{cases}$$

2. Montrer que l'application suivante n'est pas injective :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3. \end{cases}$$

- **Montrer qu'une application est surjective.**
On se donne un élément quelconque (mais fixé) y de F. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x, dans l'espoir qu'elle admette au moins une solution x pour n'importe quelle valeur de y.

Exemples

1. Montrer que l'application suivante est surjective :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3. \end{cases}$$

2. Montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{cases}$$

- **Montrer qu'une application est bijective.**
Plusieurs possibilités :

1. On montre que l'application est à la fois injective et bijective.

2. On se donne une élément quelconque (mais fixé) y de F. On prouve que l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x, admet une et une seule solution x pour chaque valeur de y.

3. S'il s'agit d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut utiliser le *théorème de la bijection.*

Exemple 1

1. Montrer que l'application suivante est bijective :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{cases}$$

2. Citer plusieurs bijections classiques et donner leur réciproque.

II. Cardinal d'un ensemble

Définition (Ensemble fini)
Un ensemble non vide E est *fini* lorsqu'il existe un entier naturel non nul n tel qu'on puisse définir une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E.
On démontre alors que n est unique, et on l'appelle le *cardinal* de l'ensemble E.

Remarque Par convention, l'ensemble vide est fini et son cardinal est 0.

Notation $n = \operatorname{Card} E$ ou $n = |E|$.

Exemples

- $\operatorname{Card}(\varnothing) = 0$.
- $\operatorname{Card}([\![0, n]\!]) = n + 1$.
- $\operatorname{Card}([\![a, b]\!]) = b - a + 1$, pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $b > a$.

Définition (Ensembles infinis)
Un ensemble qui n'est pas fini est dit *infini*.
Si E est un ensemble infini, et s'il existe une bijection de E vers $\mathbb{N}$, alors E est dit *dénombrable*.

Exemples
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ est infini mais n'est pas dénombrable.

Proposition 1 (Propriétés des cardinaux)**.**

- *Si E est un ensemble fini, alors toute partie F de E est également finie et* $0 \leqslant \operatorname{Card}(F) \leqslant \operatorname{Card}(E)$.
- *Soit f une application de l'ensemble fini E vers l'ensemble fini F.*
  - × *Si f est injective, alors* $\operatorname{Card}(E) \leqslant \operatorname{Card}(F)$.
  - × *Si f est surjective, alors* $\operatorname{Card}(E) \geqslant \operatorname{Card}(F)$.
  - × *Si f est bijective, alors* $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$.
- Réunion disjointe *: Si A et B sont deux ensembles finis, leur réunion $A \cup B$ l'est aussi et*

$$A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; \operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

- Complémentaire *: Si E est un ensemble fini, alors pour toute partie A de E,*

$$\operatorname{Card}\left(\overline{A}\right) = \operatorname{Card}(E) - \operatorname{Card}(A).$$

- Produit cartésien *: SI E et F sont des ensembles finis, alors $E \times F$ l'est aussi et*

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card}(E) \times \operatorname{Card}(F).$$

  Par récurrence, on a donc, pour $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) & = & \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(E_i) \\ & \textit{et} & \\ \operatorname{Card}(E^p) & = & (\operatorname{Card}(E))^p . \end{array}$$

- Formule du crible *: Elle concerne les réunions quelconques d'ensembles finis :*

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)\,.$$

Par récurrence, pour n ensembles finis $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i) \\
&\quad - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n-1}\,\mathrm{Card}\,(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)
\end{aligned}$$

qu'on écrira de façon plus condensée :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})\,.$$

III. Principaux résultats

Proposition 2 (Nombre de suites de p éléments d'un ensemble à n éléments. ($p \in \mathbb{N}^*$))**.**
Soit E un ensemble de cardinal n.
Une suite de p éléments de E est un élément de l'ensemble E^p.
Le nombre de ces suites est donc n^p.

Remarque Une suite p éléments de E est aussi appelée une p-liste d'éléments de E.

Exemple 2
$(1, 2, 3, 1)$ et $(2, 2, 2, 3)$ sont deux 4-listes de $E = \{1, 2, 3\}$, qui en compte $3^4 = 81$.

Proposition 3 (Nombre de suites de p éléments distincts d'un ensemble à n éléments)**.**
Soit E un ensemble de cardinal n.
Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, le nombre de suites de p éléments distincts de E est le produit de p facteurs suivant :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1).$$

Exemple 3
$(1, 2, 3)$ et $(4, 5, 1)$ sont deux suites de 3 éléments distincts de $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, qui en compte $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Remarque Le nombre de suites de n éléments de E est $A_n^n = n(n-1)\cdots 2.1$. Ce nombre est noté $n!$ (on lit "*factorielle n*"). Par convention, $0!$ est égal à 1. On a alors

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Proposition 4 (Nombre de parties de p éléments d'un ensemble à n éléments)**.**
Soit E un ensemble de cardinal n.
Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, le nombre de parties de p éléments (forcément distincts) de E est

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times p}.$$

Remarque Par ailleurs, pour $p > n$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{p} = 0.$$

Pour les calculs littéraux, on utilise la relation

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple 4
$\{1,2,3\}$ et $\{1,4,5\}$ sont deux parties de 3 éléments de $E = \{1,2,3,4,5\}$, parmi les $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} =$ 10 parties de 3 éléments que compte l'ensemble E.

Proposition 5 (Propriétés des $\binom{n}{p}$)**.**
En adoptant la convention $\binom{n}{p} = 0$ pour $p > n$ ou $p < 0$, on a

- $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- Relation de Pascal *:* $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

MÉTHODO

Le *triangle de Pascal* donne les entiers $\binom{n}{p}$ en utilisant la relation de Pascal :

valeurs de n / valeurs de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
1		1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
2			1	3	6	10	15	21	28	$\cdots$
3				1	4	10	20	35	56	$\cdots$
4					1	5	15	35	70	$\cdots$
5						1	6	21	56	$\cdots$
6							1	7	28	$\cdots$
7								1	8	$\cdots$
8									1	$\cdots$
$\vdots$									$\vdots$	$\ddots$

Remarque On retiendra les coefficients remarquables suivants :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \quad \text{etc.}$$

Proposition 6 (Binôme de Newton)**.**
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

avec la convention $0^0 = 1$*.*
Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ *telles que* A **et** B **commutent***, i.e.* $AB = BA$*, on a*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} A^k B^{n-k}.$$

IV. Applications

1. **Nombre d'applications de E dans F.**
Soit E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n. Le nombre d'applications de E dans F est donné par

$$\mathrm{Card}\left(F^E\right) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)} = n^p.$$

En effet, à chaque application f de E dans F correspond bijectivement une suite d'éléments de F : la suite des p images par f des p éléments de E.

2. **Nombre de parties d'un ensemble.**
Soit E un ensemble de cardinal n. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est donné par

$$\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n.$$

En effet la fonction f définie de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & g \text{ telle que } \forall x \in E, \begin{cases} g(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ g(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

réalise une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$. Donc

$$\mathrm{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = \mathrm{Card}\left(\{0,1\}^E\right) = \mathrm{Card}\left(\{0,1\}\right)^{\mathrm{Card}(E)} = 2^n.$$

3. **Nombre d'injections de E dans F.**
Soit E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n. Le nombre d'injections de E dans F est égal à A_n^p.
En effet, à chaque injection f de E dans F correspond bijectivement la suite des p images deux à deux distinctes des éléments de E.
Cas particulier : si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$, le nombre de bijections de E vers F est $A_n^n = n!$.

4. **Nombre de surjections de E dans F.**
Ce nombre, noté S_n^p s'obtient à l'aide de la formule du crible (il n'y a pas de formule simple).

5. **Nombre de suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1,n]\!]$.**
À chaque suite strictement croissante $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de p éléments de $[\![1,n]\!]$, on fait correspondre la partie $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ de $[\![1,n]\!]$. La correspondance est bijective car, étant donnée une partie quelconque à p éléments de $[\![1,n]\!]$, il existe une et une seule façon de les ranger par ordre croissant, c'est-à-dire une et une seule suite strictement croissante qui soit l'antécédent de la partie donnée.
Il y a donc bien $\binom{n}{p}$ suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1,n]\!]$.

6. **Nombre de suites croissantes de p éléments de $[\![1,n]\!]$.** (hors programme)
Ce nombre, noté Γ_n^p, est égal à $\binom{n+p-1}{p}$. C'est aussi le nombre de « combinaisons avec répétition » de p éléments pris parmi n.