Comparaisons de fonctions et développements limités

I. Notations et définitions

Définition (Adhérence)
On appelle adhérence de l'intervalle I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes. Plus précisément, on a :

1) si I à bornes finies $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: alors $\overline{I} = I \cup \{a, b\} = [a, b]$.
($\hookrightarrow$ vrai pour $I =]a, b[$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$, $I = [a, b]$)

2) si I à borne(s) infinie(s) :

- $\times$ si $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b]$,
- $\times$ si $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$, alors $\overline{I} = [a, +\infty[$,
- $\times$ si $I =]-\infty, +\infty[$, alors $\overline{I} =]-\infty, +\infty[$.

Définition (Voisinage d'un point)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voisinage de x_0.
  Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Commentaire

On ne considère ici que des voisinages centrés en x_0. En général, un voisinage (fermé) de x_0 est un segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.
Autrement dit, c'est un segment qui contient x_0 et non réduit à $\{x_0\}$.

Définition (Voisinage de l'infini)

Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme :
  $[A, +\infty[$ où A est un réel tel que $A > 0$.
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme :
  $]-\infty, B]$ où B est un réel tel que $B > 0$.
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe $B > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, B]$.

Commentaire

- La notion de voisinage permet de formaliser l'idée de propriété vérifiée « à proximité » d'un point x_0 / « à proximité » de l'infini.
- La notion de convergence pour les suites est définie par une propriété vérifiée à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$.
  Autrement dit, par une propriété vérifiée au voisinage de $+\infty$.

II. Fonctions négligeables

Définition (Négligeabilité)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).
On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Commentaire

On pourra aussi noter :

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l}\text{il existe } \varepsilon : \mathcal{V}(a) \to \mathbb{R} \text{ telle que } \displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \text{ vérifiant}\\ f(x) = g(x)\,\varepsilon(x)\end{array}$$

Exercice 1

1. Montrer que $e^{-\sqrt{x}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. Que peut-on dire de la fonction f au voisinage du point a si $f = \underset{x\to a}{o}(1)$?

Proposition 1 (Croissances comparées).
Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- *Au voisinage de* $+\infty$, *on a :*

$\times$ $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ *avec* $0 < \alpha < \beta$ $\qquad$ $\times$ $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^x\right)$ $\qquad$ $\times$ $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$

- *Au voisinage de* 0, *on a :*

$\times$ $x^\beta \underset{x\to0^+}{=} o\left(x^\alpha\right)$ *avec* $0 < \alpha < \beta$ $\qquad$ $\times$ $\ln(x) \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Proposition 2 (Règles de calcul).
On considère des fonctions f, g *et* h *définies au voisinage de* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Alors :*

1) Transitivité : Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ *et* $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, *alors* $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$

2) Linéarité : Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ *et* $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, *alors :*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$$

3) On a : $g(x) \cdot \underset{x\to a}{o}(h(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x)h(x))$.

4) On a : $\forall \theta \in \mathbb{R}^*$, $\underset{x\to a}{o}(\theta g(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Preuve.

1) *Transitivité* :
Supposons : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
Alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

Or, pour tout $x \in \mathcal{V}(a) \setminus \{a\}$:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{\cancel{g(x)}}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \times \underbrace{\frac{\cancel{g(x)}}{h(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$, *i.e.* : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

2) *Linéarité* :
Supposons : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
Démontrons : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\alpha f(x) + \beta g(x)}{h(x)} = \alpha \underbrace{\frac{f(x)}{h(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} + \beta \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\alpha f(x) + \beta g(x)}{h(x)} = 0$, *i.e.* $\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

3) Soit $\tilde{f}$ une fonction définie au voisinage de a.

- D'une part :

$$\tilde{f}(x) = g(x)\cdot \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)\,h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

- D'autre part :

$$\tilde{f}(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\,h(x)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)\,h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi :

$$\tilde{f}(x) = g(x)\cdot \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \tilde{f}(x) = \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\,h(x)\big)$$

D'où : $g(x)\cdot \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big) \;=\; \underset{x\to a}{o}\big(g(x)\,h(x)\big)$.

4) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$.
Soit $\tilde{f}$ une fonction définie au voisinage de a. Alors :

$$\tilde{f}(x) = \underset{x\to a}{o}(\theta g(x)) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)}{\theta g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$
$$\Leftrightarrow\quad \cancel{\theta}\,\frac{f(x)}{\cancel{\theta} g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{(car } \theta \neq 0\textit{)}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$
$$\Leftrightarrow\quad f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

Ainsi : $\forall \theta \in \mathbb{R}^*,\ \underset{x\to a}{o}(\theta g(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

$\square$

Exercice 2
On considère les fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$f(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad\text{et}\quad g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$$

Simplifier $(2-x)f(x)$ puis $f(x)+g(x)$.

Exercice 3
En posant $t = \dfrac{1}{x^2}$, montrer qu'au voisinage de 0, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

III. Fonctions équivalentes

Définition (Équivalence)
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a)
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Une fonction non nulle au voisinage de a n'est jamais équivalente à 0 au voisinage de a.

Commentaire

- Trouver une fonction g équivalente à une fonction f en a c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f à proximité de a. Ainsi, si l'on se place à proximité de a, les courbes représentatives de f et de g apparaîtront comme confondues.
- Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que la fonction f (penser par exemple aux fonctions polynomiales).

Proposition 3.

- *Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en* $+\infty$.
- *Tout polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré en* 0.

Preuve.
Soit f un polynôme de degré n. Alors il existe $(a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-m+1}$, avec $a_m \neq 0$ et $a_n \neq 0$ tels que $f(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On remarque :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x_n}{a_n x_n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{a_n x^n} = 1$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$.
De même :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{a_m x^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x_n}{a_m x_m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m}{a_m x^m} = 1$$

c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m$. □

Proposition 4.

- *Une caractérisation des $\sim$ par les o :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

- *En particulier :*

$$f(x) + \underset{x\to a}{o}(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

Preuve.
On sait que, d'une part, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ signifie $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

D'autre part, $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$ signifie que $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$,

i.e. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$, ou encore $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On a donc bien $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$. □

Exercice 4
Montrer de deux manières différentes :

$$\frac{x^3}{2} - \ln(x) + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

Proposition 5 (Règles de calculs)**.**
Soient $f, g, h, t : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)
Soit $a \in \overline{I}$ ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
La relation $\underset{x\to a}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) Réflexivité :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

2) Symétrie :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

3) Transitivité :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$$

4) Compatibilité avec le produit :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to a}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \times h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \times t(x)$$

5) Compatibilité avec le quotient :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to a}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}$$

6) Équivalent et limites :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

La symétrie est fausse pour les o.

Exercice 5

1. Déterminer un équivalent de $f(x) = \dfrac{x^5 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 4x}$ en $+\infty$ puis en 0.

2. Déterminer un équivalent de $g(x) = \left(x^2 + \ln(x)\right)\left(\mathrm{e}^x - x^3\right)^2$ en $+\infty$ puis en 0^+.

on ne peut ni sommer, ni composer les équivalents en général

Exemples

- On a : $x + 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x + 1$ et $-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$. En sommant, on obtiendrait $2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, ce qui est bien évidemment faux.
- On a : $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. En composant par exp, on obtiendrait : $\mathrm{e}^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$, ce qui est faux car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e} \neq 1$

Exercice 6

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x^3 - \ln(x)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - \ln(x)}{\sqrt{\mathrm{e}^x + x^3}}$.

Proposition 6.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors :

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

Cette proposition permet d'obtenir les équivalents classiques suivants :

Proposition 7 (Équivalents classiques)**.**

- *Au voisinage de* 0 *:*
  - × $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - × $\ln(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
  - × $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ *pour* $\alpha \neq 0$
- *Au voisinage de* 1 *:*

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$$

Commentaire

- On retrouve ainsi des limites classiques comme :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

- La relation $(1 + x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ donne, avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, l'équivalent suivant :

$$\sqrt{x + 1} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\ln(1+\sqrt{x})}$.

2. Montrer que $t^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t}$.

IV. Développements limités

IV.1. Définition

Définition (DL d'ordre 1)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0.
On dit que f admet un *développement limité (DL) d'ordre* 1 *au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$$

En particulier, on dit que f admet un DL d'ordre 1 au voisinage de 0 s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

Commentaire

On trouvera aussi la définition suivante :
La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telq que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Commentaire

- Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - (a_0 + a_1\,(x - x_0)) = 0$.
  Ainsi, les courbes représentatives de f et de la droite d'équation $y = a_0 + a_1\,(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0.
- C'est pourquoi on dit que la droite d'équation $y = a_0 + a_1\,(x - x_0)$ est une **approximation affine** de f en x_0.
  $\hookrightarrow$ c'est la droite qui représente le mieux la fonction f au voisinage de x_0.

Définition (DL d'ordre 2)
On dit que f admet un *développement limité (DL) d'ordre* 2 *au voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

En particulier, on dit que f admet un DL d'ordre 2 au voisinage de 0 s'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

⚠ Les égalités définissant les DL ne sont valables que localement (au voisinage de x_0).

Théorème 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0	$\Leftrightarrow$	*f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0*

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve.
($\Rightarrow$) Supposons f dérivable en x_0.

Notons $\varepsilon(x) = \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(c'est le ε donné par la formule finale)
On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{array}{ll} & \varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Au final, on a bien :
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a_0 = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

× $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + \varepsilon(x)$

On en conclut que $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie quand $x \to x_0$. □

Commentaire

D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 1 en x_0.

Théorème 2 (Formule de Taylor-Young)**.**

- *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*
  Alors f admet un DL d'ordre 1 au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$$

- *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*
  Alors f admet un DL d'ordre 2 au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Commentaire

On utilise le plus souvent ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$ ce qui donne respectivement :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Exercice 9

Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$.

IV.2. Développements limités des fonctions usuelles

Théorème 3.

On a, **au voisinage de** 0,

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$
- $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$

Commentaire

On peut en déduire par exemple les DL suivants au voisinage de 0 :

- $\ln(1 - x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$
- $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$
- $\sqrt{1 + x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$

Commentaire

Les opérations d'addition et de composition qui sont **interdites** pour les équivalents sont possibles avec les développements limités. Lorsqu'un calcul d'équivalent ou de limite n'aboutit pas, il faut penser à utiliser des développements limités.

IV.3. Application 1 : Recherche d'équivalents et de limites

Proposition 8.
Soit f une fonction admettant un DL d'ordre 2 au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Alors f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité.

Exercice 10

1. Déterminer l'équivalent au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \ln(1 + x) - x$

2. Déterminer la limite en 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1}{2x^2}$

IV.4. Application 2 : Position par rapport à une tangente

Proposition 9.
Soit f une fonction définie en x_0 et admettant un DL d'ordre 2 au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Alors :

- *f est dérivable en x_0 et $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.*
- *L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.*
- *Comme $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_2(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$, alors $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \underset{x \to x_0}{\sim} a_2(x - x_0)^2$. Donc la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $a_2(x - x_0)^2$, donc par le signe de a_2.*

Exercice 11
Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sqrt{1 + x}$.
Calculer le DL d'ordre 2 en 0 de f, puis en déduire l'équation de la tangente en 0, ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.