Couples et suites de variables aléatoires discrètes

I. Couples de v.a. discrètes

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y, avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ fini ou dénombrable.

Définition (Couple aléatoire discret)
On appelle couple aléatoire discret une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$.
Ainsi on peut écrire $Z = (X, Y)$, où X et Y sont deux v.a. discrètes, avec

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Exercice 1
On lance simultanément deux dés, et on note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit (au sens large).

Exercice 2
Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire 3 boules dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules vertes.

Exercice 3
On effectue une suite de lancers avec une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{3}{4}$ (et celle d'obtenir Face vaut donc $\frac{1}{4}$). On note X la longueur de la première chaîne obtenue, *i.e.* le nombre de tirages initiaux donnant le même résultat que le premier tirage. On note Y la longueur de la deuxième chaîne. Ainsi, si les premiers tirages donnent $PPPPFFP$ (peu importe la suite), on aura $X(\omega) = 4$ et $Y(\omega) = 2$.

I.1. Loi jointe

Définition (Loi jointe)
La loi jointe du couple (X, Y) est la donnée de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{X,Y} : & X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ & (x,y) & \mapsto & \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{array}$$

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$

Lorsqu'on demande la loi du couple (X, Y), il faut :

- Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
- Donner les valeurs de $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$

Commentaire

Dans la littérature, on pourra trouver la notation $[(X,Y)=(x,y)]$ ou $[X=x, Y=y]$ en lieu et place de $[X=x] \cap [Y=y]$.

Commentaire

Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut résumer cette loi dans un tableau à double entrée.

Exercice 4
On reprend l'exercice 1.

- On a $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $Y(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Calculons la loi jointe de (X,Y). Soit $(i,j) \in [\![1,6]\!]$
  - × Si $i < j$.
    Alors $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = 0$ (le plus grand nombre ne peut pas être inférieur au plus petit).
  - × Si $i = j$.
    Alors $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \dfrac{1}{36}$ (le seul tirage favorable sur les 36 possibles est le tirage (i,i))
  - × Si $i > j$.
    Alors $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \dfrac{1}{18}$ (les deux tirages (i,j) et (j,i) sont possibles)

  On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant (X en ligne, Y en colonne).

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Exercice 5
Reprenons l'exercice 2.

- On a ici $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
  On ne peut bien sûr pas avoir $X+Y > 3$ puisqu'on ne tire que 3 boules.
- On détermine alors $\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$ pour $i \in [\![0,3]\!]$ et $j \in [\![0,3]\!]$.
  L'événement $[X=i] \cap [Y=j]$ est entièrement déterminé par :
  - × le choix des i boules blanches tirées : $\binom{3}{i}$ possibilités.

× le choix des j boules vertes tirées : $\binom{4}{j}$ possibilités.

× le choix des boules complétant le tirage : $\binom{5}{3-i-j}$ possibilités.
(ce sont forcément des boules vertes)

Comme il y a $\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3}$ tirages possibles, la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \;=\; \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$$

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{220}$
1	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{55}$	0
2	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{110}$	0	0
3	$\frac{1}{55}$	0	0	0

Commentaire

Si l'on somme tous les éléments du tableau, on obtient 1. *(c'est une mesure de vérification !)*
Ceci provient du fait que $([X = x] \cap [Y = y])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est **le système complet d'événements associé au couple** (X, Y).
Ce point est détaillé dans la section suivante.

La probabilité $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ n'est a priori pas égale à $\mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$.
Si on revient sur l'exemple 1, on a :

× $\mathbb{P}([X = 1]) \;=\; \frac{1}{36}$
En effet, l'événement $[X = 1]$ (« le plus grand résultat des deux dés est 1 ») est réalisé par le seul tirage $\omega = (1, 1)$.

× $\mathbb{P}([Y = 1]) \;=\; \frac{11}{36}$
En effet, l'événement $[Y = 1]$ (« le plus petit résultat des deux dés est 1 ») est réalisé par 11 tirages différents : $(1, i)$ pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$ et $(j, 1)$ pour tout $j \in [\![2, 6]\!]$ *(attention à ne pas compter* $(1, 1)$ *deux fois)*.

On a donc :

$$\mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}([Y = 1]) \;=\; \frac{1}{36} \times \frac{11}{36} \;\neq\; \frac{1}{36} \;=\; \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$$

Cela signifie que les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ ne sont pas indépendants (pour la probabilité $\mathbb{P}$).

Commentaire

Certaines des probabilités $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ peuvent être nulles, même si $\mathbb{P}([X = x])$ et $\mathbb{P}([Y = y])$ sont toutes les deux non nulles.

I.2. Lois marginales

Proposition 1.
Les événements $[X = x] \cap [Y = y]$ pour x parcourant $X(\Omega)$ et y parcourant $Y(\Omega)$ forment un système complet d'événements (SCE). On a donc :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 1$$

Preuve.

1) Cette famille est composée d'événements 2 à 2 incompatibles.
Choisissons deux événements de cette famille : considérons donc $(x_1, y_1) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $(x_2, y_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tels que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

$$\begin{array}{rl} & ([X = x_1] \cap [Y = y_1]) \cap ([X = x_2] \cap [Y = y_2]) \\ = & ([X = x_1] \cap [X = x_2]) \cap ([Y = y_1] \cap [Y = y_2]) \\ = & \varnothing \end{array}$$

En effet, on a forcément $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ car $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

2) La réunion de ces événements est Ω.

$$\begin{array}{rll} & \bigcup\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} [X = x] \cap [Y = y] & \\ = & \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \left(\bigcup\limits_{y \in Y(\Omega)} [X = x] \cap [Y = y] \right) & \\ = & \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} \left([X = x] \cap \left(\bigcup\limits_{y \in Y(\Omega)} [Y = y] \right) \right) & \textit{(car } \cap \textit{ est distributive par rapport à } \cup\textit{)} \\ = & \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} ([X = x] \cap \Omega) & \textit{(car } ([Y = y])_{y \in Y(\Omega)} \textit{ est un sce)} \\ = & \bigcup\limits_{x \in X(\Omega)} [X = x] \ = \ \Omega & \textit{(car } ([X = x])_{x \in X(\Omega)} \textit{ est un sce)} \end{array}$$

On en déduit notamment que :

$$\begin{array}{rl} & \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \sum\limits_{y \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ = & \sum\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} [X = x] \cap [Y = y] \Big) \\ = & \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \end{array}$$

On souligne que cette démonstration est valable dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis mais aussi dans le cas où ils sont infinis (dénombrables). Cela implique alors que les sommes considérées sont infinies. $\square$

Définition (Loi marginale)

1. La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la v.a. X.
2. La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la v.a. Y.

MÉTHODO

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes dont on connaît la loi jointe.

- On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales avec le SCE $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$.

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

ou, si : $\forall y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$$

- On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales avec le SCE $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

ou, si : $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y])$$

⚠ La loi jointe de X et Y permet donc de déterminer les lois marginales de X et de Y. Mais la réciproque est fausse en général !

Commentaire

Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et chaque colonne.
Ce n'est cependant pas une justification. Il faut toujours justifier ses résultats avec la formule des probabilités totales.

Exemple
Reprenons l'exercice 1.
Pour connaître les lois marginales de X et Y, on utilise le tableau à double entrée.

$y \in Y(\Omega)$ / $x \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	$\mathbb{P}([X = i])$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\mathbb{P}([Y = j])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Exercice 6
Une urne contient une boule blanche et une boule noire, indiscernables au toucher. On y prélève une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée.
On répète cette épreuve et on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les v.a. $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ définies par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la loi de X_1 et son espérance $\mathbb{E}(X_1)$.

2. Donner la loi jointe du couple (X_1, X_2).

3. En déduire les lois marginales du couple (X_1, X_2)

Exercice 7
On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

1. Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis déterminer la loi du couple (X, Y).

2. Déterminer la seconde loi marginale du couple (X, Y).

3. Que vaut $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$? Retrouver cette valeur par le calcul.

Preuve.

1. Dans la suite, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :

× P_i : « obtenir pile au $i^{\text{ème}}$ tirage »

× F_i : « obtenir face au $i^{\text{ème}}$ tirage »

- Le premier pile peut apparaître dès le premier tirage. Le deuxième apparaît au mieux lors du deuxième tirage.
  Ainsi : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$.

  × Si $i \geqslant j$: comme le premier pile ne peut apparaître après le deuxième :
  $$[X = i] \cap [Y = j] \ = \ \varnothing$$
  donc $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

  × Si $i < j$: dans ce cas :
  $$[X = i] \cap [Y = j] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1} \cap P_j$$
  Par indépendance des lancers, on a alors :
  $$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{i-1}) \times \mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(F_{i+1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_{j-1}) \times \mathbb{P}(P_j) \\ = \ & q^{i-1} \ p \ q^{j-i-1} \ p \\ = \ & q^{j-2} \ p^2 \end{aligned}$$

2. Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un SCE.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([Y = j]) \\ = \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ = \ & \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) + \sum_{i=j+1}^{+\infty} \cancel{\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])} \\ = \ & \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2} \, p^2 \ = \ (j-1) \, q^{j-2} \, p^2 \end{aligned}$$

3. • $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$. En effet :
$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ = \ & \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ = \ & \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}} [X = i] \cap [Y = j] \Big) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \end{aligned}$$
car la famille $([X = i] \cap [Y = j])_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}}}$ forme un SCE.

- On peut retrouver ce résultat par calcul.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \\ = \ & \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)\, q^{j-2}\, p^2 \ = \ p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1)\, q^{j-2} \\ = \ & p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j\, q^{j-1} \ = \ p^2 \, \frac{1}{(1-q)^2} \ = \ \frac{p^2}{p^2} \ = \ 1 \end{aligned}$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison q. □

Commentaire

- Lorsque l'on détermine la loi d'un couple (X, Y) *i.e.* lorsque l'on détermine les probabilités $\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])$ pour $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, il est fréquent d'avoir à effectuer une discussion sur les valeurs de x et de y.
- Cette discussion se retrouve évidemment dans les calculs suivants (déterminer une loi marginale ou déterminer une espérance comme on le verra plus tard).

I.3. Lois conditionnelles

Définition Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de v.a. discrètes et soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y=y]) \neq 0$.

- On appelle *loi conditionnelle de X sachant* $[Y=y]$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}{\mathbb{P}([Y=y])} \end{array}$$

- On appelle *loi conditionnelle de Y sachant* $[X=x]$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([Y=y] \cap [X=x])}{\mathbb{P}([X=x])} \end{array}$$

MÉTHODO

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$, on donne :

× $X(\Omega)$

× $\mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exercice 8

Reprenons l'exemple 3.

La loi de X se calcule assez facilement :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note :
  × P_i : « obtenir pile au $i^{\text{ème}}$ tirage »
  × F_i : « obtenir face au $i^{\text{ème}}$ tirage »

$$[X=k] = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \ \cup \ (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})$$

Les événements $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ sont incompatibles. Donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = k]) & = & \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}) & \\ & = & \mathbb{P}(P_1)\ \mathbb{P}(P_2) \cdots \mathbb{P}(P_k)\ \mathbb{P}(F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1)\ \mathbb{P}(F_2) \cdots \mathbb{P}(F_k)\ \mathbb{P}(P_{k+1}) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \left(\dfrac{3}{4}\right)^k \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^k \times \dfrac{3}{4} & \\ & = & \dfrac{3^k + 3}{4^{k+1}} & \end{array}$$

Pour déterminer la loi de Y, le plus simple est de passer par la loi de couple :

× $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\omega) = \mathbb{N}^*$

× Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} [(X, Y) = (i, j)] & = & [X = i] \cap [Y = j] \\ & = & (P_1 \cap \cdots \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j+i} \cap P_{j+i+1}) \\ & & \cup\ (F_1 \cap \cdots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \cdots \cap P_{j+i} \cap F_{j+i+1}) \end{array}$$

Les événements $P_1 \cap \cdots \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j+i} \cap P_{j+i+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \cdots \cap P_{j+i} \cap F_{j+i+1}$ sont incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) & = & \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j+i} \cap P_{j+i+1}) & \\ & & +\ \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \cdots \cap P_{j+i} \cap F_{j+i+1}) & \\ & = & \mathbb{P}(P_1) \cdots \mathbb{P}(P_i)\ \mathbb{P}(F_{i+1}) \cdots \mathbb{P}(F_{j+i})\ \mathbb{P}(P_{j+i+1}) & \\ & & +\ \mathbb{P}(F_1) \cdots \mathbb{P}(F_i)\ \mathbb{P}(P_{i+1}) \cdots \mathbb{P}(P_{j+i})\ \mathbb{P}(F_{j+i+1}) & \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\ & = & \left(\dfrac{3}{4}\right)^i \left(\dfrac{1}{4}\right)^j \times \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^i \left(\dfrac{3}{4}\right)^j \times \dfrac{1}{4} & \\ & = & \dfrac{3^{i+1} + 3^j}{4^{i+j+1}} & \end{array}$$

On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir la loi de Y, avec le SCE $([X = i])_{i \geqslant 1}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Y = j]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{3^{i+1} + 3^j}{4^{i+j+1}} \\ & = & \dfrac{1}{4^j} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{i+1} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^j \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4^{i+1}} \\ & = & \dfrac{1}{4^j} \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \dfrac{1}{1 - \frac{3}{4}} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^j \dfrac{1}{4^2} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ & = & \dfrac{3^2 + 3^{j-1}}{4^{j+1}} \end{array}$$

On constate que la loi de Y n'est pas la même que celle de X.

On peut ensuite étudier par exemple la loi conditionnelle de X sachant $[Y=j]$ pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé :

× $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

× Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y=j]}([X=i]) &= \frac{\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])}{\mathbb{P}([Y=j])} \\
&= \frac{3^{i+1}+3^j}{4^{i+j+1}} \times \frac{4^{j+1}}{3^2+3^{j-1}} \\
&= \frac{3^{i+1}+3^j}{4^i(3^2+3^{j-1})}
\end{aligned}$$

Exercice 9

On reprend l'exercice 6 et on définit pour $2 \leqslant p \leqslant n$ la v.a. Z_p par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1. Soit $p \leqslant n-1$. Déterminer $\mathbb{P}_{[Z_p=k]}([X_{p+1}=1])$ pour $k \in [\![0,p]\!]$.

2. En déduire la loi conditionnelle de X_{p+1} sachant $[Z_p = k]$.

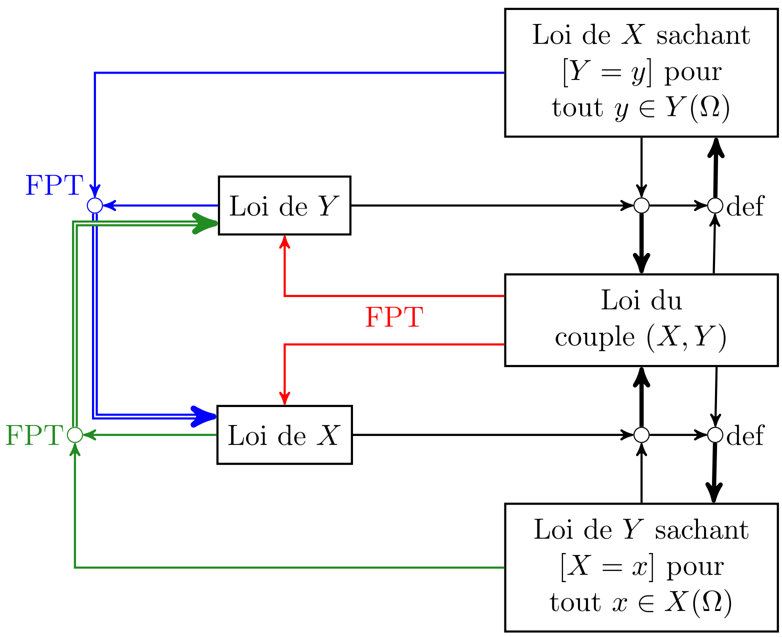
Exercice 10

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On note X le rang d'apparition du premier pile, et si $X = n$, on note Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

2. Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n$.

I.4. Résumé



II. Indépendance de variables aléatoires discrètes

II.1. Cas de deux variables aléatoires

Définition (Indépendance) On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont *indépendantes* ssi :

$$\forall\ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

Commentaire

Pour montrer que deux v.a. X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente, *i.e.* il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \neq \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

Souvent, on essaiera de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = x]) \neq 0,\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$$

Exemples

- Si on tire deux dés simultanément et qu'on note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé, X et Y sont des v.a. indépendantes.
  On a :
  $$\forall (i, j) \in [\![1, 6]\!]^2,\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}$$
- Par contre, si on prend pour X la somme des deux dés et pour Y leur produit, les 2 v.a. ne sont pas indépendantes.
  On a par exemple :
  $$\mathbb{P}([X = 8]) = \frac{5}{36}, \quad \mathbb{P}([Y = 15]) = \frac{1}{18} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = 8] \cap [Y = 15]) = \frac{1}{18}$$

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

1) *Supposons que : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Alors :*

$$\begin{aligned} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \mathbb{P}([Y = y]) \end{aligned}$$

2) *Supposons que : $\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. Alors :*

$$\begin{aligned} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) = \mathbb{P}([X = x]) \end{aligned}$$

Commentaire

Dans le cas où X et Y sont des v.a. indépendantes, on peut obtenir la loi jointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemple

- Dans les exemples 1 et 2, on constate sans surprise que les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes (le fait qu'on ait des 0 dans le tableau de la loi jointe suffit à imposer qu'il n'y ait pas indépendance)
- L'exemple 3 est moins intuitif. Le calcul des lois conditionnelles, qui sont distinctes de la loi marginale de X, prouve qu'il n'y a pas non plus indépendance.

  Une autre façon de voir les choses est de trouver un contre-exemple à l'indépendance des événements $[X = i]$ et $[Y = j]$. On peut ici simplement calculer :

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{3+3}{4^2} = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{3^2+1}{4^2} = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{3^2+3}{4^3} = \frac{3}{16} \neq \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}$$

II.2. Cas de n variables aléatoires

Définition (Indépendance mutuelle)

- On dit que les v.a. discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont *mutuellement indépendantes* ssi :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k = x_k])$$

- On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a. mutuellement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les v.a. $X_0, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

II.3. Lemme des coalitions

Proposition 2 (Lemme des coalitions)**.**

- *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes* **indépendantes** *et soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions.*

  Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- *Soient $X_1, \ldots, X_n$ n des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in [\![2, n-1]\!]$.*
  Alors toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute v.a. s'exprimant en fonction des v.a. $X_{p+1}, \ldots, X_n$.

Exemples

- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 v.a. discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

III. Fonctions de deux variables aléatoires discrètes : Loi de $Z = g(X,Y)$

Dans cette section, on étudie des v.a. du type $Z = g(X,Y)$ où (X,Y) est un couple de v.a. et g une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.

- *L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X,Y)$ est donné par :*

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subset & \{g(x,y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

- *La loi de $Z = g(X,Y)$ est donnée par :*

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}([Z = z]) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]),$$

la somme précédente portant sur l'ensemble des couples (x,y) vérifiant $g(x,y) = z$.

Exercice 11

1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ deux variables de Bernoulli indépendantes.
Déterminer la loi de $Z = XY$.

2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer $\mathbb{P}([X = Y])$.

Proposition 3 (HP)**.**
Soient X et Y deux v.a. discrètes. Alors

- *$X + Y$ est une v.a.r. discrète.*
- *La loi de $X + Y$ est donnée par, pour tout $z \in (X+Y)(\Omega)$:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X+Y = z]) & = & \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z - x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \\ & = & \displaystyle\sum_{z - y \in X(\Omega) y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = z - y] \cap [Y = y]) \end{array}$$

Preuve.
On applique la formule des probabilités totales avec le SCE $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X+Y = z]) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [X + Y = z]) \\ & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \end{array}$$

□

Commentaire

Les formules précédentes découlent de l'application de la formule des probabilités totales. Il faut refaire la démonstration à chaque fois.
Noter que la probabilité $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x])$ est nulle dès que $z - x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$, ce qui a pour conséquence de restreindre les indices de sommation.

Exemple
Deux v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,4 \rrbracket)$ (par exemple les résultats d'un lancer de dés à six faces et à quatre faces).
Déterminons la loi de $X+Y$.

- $\Omega = \llbracket 1,6 \rrbracket \times \llbracket 1,4 \rrbracket$ est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
- $X(\Omega) = \llbracket 1,6 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1,4 \rrbracket$
- $(X+Y)(\Omega) = \llbracket 2,10 \rrbracket$
- Soit $k \in \llbracket 2,10 \rrbracket$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} [X+Y=k] & = & \bigcup\limits_{\substack{i \in \llbracket 1,6 \rrbracket \\ k-i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}} [X=i] \cap [Y=k-i] \\ & = & [X=1] \cap [Y=k-1] \\ & \cup & [X=2] \cap [Y=k-2] \\ & \cup & [X=3] \cap [Y=k-3] \\ & \cup & [X=4] \cap [Y=k-4] \\ & \cup & [X=5] \cap [Y=k-5] \\ & \cup & [X=6] \cap [Y=k-6] \end{array}$$

Chacun des événements apparaissant dans l'union n'est réalisé au plus que par un tirage (attention : si $k-i \neq 0$, $[Y=k-i] = \varnothing$).
On en déduit la loi de $X+Y$.

$k \in (X+Y)(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}([X+Y=k])$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Exercice 12
Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Montrer, en utilisant un SCE associé à X que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}([X+Y=n]) = (n-1)\ p^2\ q^{n-2}$$

Proposition 4 (HP).
Soient X et Y deux v.a. discrètes indépendantes de fonction de répartition respective F_X et F_Y. Alors :

- *la fonction de répartition de la v.a. $Z = \max(X,Y)$ est donnée par $F_Z = F_X F_Y$.*
- *la fonction de répartition de la v.a. $U = \min(X,Y)$ est donnée par : $F_U(u) = 1-(1-F_X(u))(1-F_Y(u))$, pour tout $u \in U(\Omega)$.*

Preuve.

- Soit $z \in \mathbb{R}$.
  - × Tout d'abord :
  $$[Z \leqslant z] \ = \ [\max(X,Y) \leqslant z] \ = \ [X \leqslant z] \cap [Y \leqslant z]$$
  - × Ensuite :
  $$\begin{array}{rcll} F_Z(z) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant z]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant z] \cap [Y \leqslant z]) & \\ & = & \mathbb{P}([X \leqslant z])\mathbb{P}([Y \leqslant z]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & F_X(z)\, F_Y(z) & \end{array}$$

- Soit $u \in \mathbb{R}$.
  - Tout d'abord :
  $$[U > u] \ = \ [\min(X,Y) > u] \ = \ [X > u] \cap [Y > u]$$
  - Ensuite :
  $$\begin{array}{rcll} F_U(u) & = & \mathbb{P}([U \leqslant u]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([U > u]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X > u] \cap [Y > u]) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X > u])\mathbb{P}([Y > u]) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & 1 - (1 - F_X(u))(1 - F_Y(u)) & \end{array}$$

$\square$

Exemple
Reprenons une nouvelle fois le lancer de deux dés. On note X le résultat du premier dé et Y celui du second dé.
Les deux fonctions de répartition F_X et F_Y sont les mêmes :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{6} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{2}{6} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

On note $Z = \max(X,Y)$. La fonction de répartition F_Z est donc donnée par :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{36} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{4}{36} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Commentaire

Une fois connu le maximum de 2 v.a.r. , on peut en déduire le minimum en utilisant la relation :

$$X + Y \ = \ \min(X,Y) + \max(X,Y)$$

Théorème 3 (Stabilité des lois classiques)**.**

- *Stabilité des lois binomiales.*

  Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ *avec* X *et* Y **indépendantes**, *alors* $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.

- *Stabilité des lois de Poisson.*

  Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ *avec* X *et* Y **indépendantes**, *alors* $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Preuve.

- On suppose, sans perte de généralité : $n \geqslant m$.
  - × Comme $X(\Omega) = [\![0,m]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset [\![0,m+n]\!]$.
  - × Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $([X=i])_{i\in[\![0,m]\!]}$ est un SCE.
    Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll}
 & \mathbb{P}([X+Y=k]) & \\
= & \sum\limits_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) & \\
= & \sum\limits_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) & \\
= & \sum\limits_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) & \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= & \sum\limits_{\substack{i=0 \\ k-i\in Y(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) & \\
 & + \cancel{\sum\limits_{\substack{i=0 \\ k-i\notin Y(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])} & \textit{(car } [Y=k-i]=\varnothing \textit{ si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) &
\end{array}$$

  - × La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-i \in Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ i \in [\![0,m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant k-i \leqslant n \\ 0 \leqslant i \leqslant m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k-m \leqslant i \leqslant k \\ 0 \leqslant i \leqslant m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant i \leqslant k\right.$$

  - × Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X+Y=k] & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\,\mathbb{P}([Y=k-i]) & \\
 & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i\,(1-p)^{m-i}\,\binom{n}{k-i} p^{k-i}\,(1-p)^{n-(k-i)} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} p^k\,(1-p)^{m+n-k} & \\
 & = & p^k(1-p)^{m+n-k} \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} & \\
 & = & \binom{m+n}{k}\ p^k(1-p)^{m+n-k} & \textit{(d'après la formule de Vandermonde)}
\end{array}$$

  Finalement : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.

- $\times$ Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

  $\times$ Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un SCE.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) & \\
= & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) & \\
= & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) & \\
= & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) & \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= & \sum\limits_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) & \\
+ & \cancel{\sum\limits_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])} & \textit{(car } [Y=k-i]=\varnothing \textit{ si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) &
\end{array}$$

  $\times$ La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{ \begin{array}{l} k-i \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ i \in [\![0, +\infty[\![\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant k-i \\ 0 \leqslant i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \leqslant k \\ 0 \leqslant i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \ 0 \leqslant i \leqslant k \right.$$

  $\times$ Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X+Y=k] & = & \sum\limits_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\, \mathbb{P}([Y=k-i]) & \\
& = & \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{\lambda^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\ \mathrm{e}^{-\mu} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{-\lambda}\, \mathrm{e}^{-\mu} \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{1}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\, \mu^{k-i} & \\
& = & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\, \mu k - i & \\
& = & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i}\ \lambda^i\, \mu k - i & \\
& = & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \dfrac{1}{k!}\ (\lambda+\mu)^k & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{array}$$

Finalement : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

$\square$

Exercice 13
Soient $X_1, \dots, X_k$ des v.a. mutuellement indépendantes.

1. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

2. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.

3. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

Exemple

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reconnaître la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Preuve.

- Les v.a.r. X et Y étant indépendantes, $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

  On en déduit que : $\mathbb{P}([X + Y = n]) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \dfrac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \neq 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X+Y=n]}([X = k]) &= \frac{\mathbb{P}([X = k] \cap [X + Y = n])}{\mathbb{P}([X + Y = n])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n - k])}{\mathbb{P}([X + Y = n])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([X = k])\ \mathbb{P}([Y = n - k])}{\mathbb{P}([X + Y = n])} \quad \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{aligned}$$

  On distingue alors deux cas :

  × Si $k > n$: alors $[Y = n - k] = \varnothing$. Et donc $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}([X = k]) = 0$.

  × Si $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X+Y=n]}([X = k]) &= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-\mu}\ \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\ \mathrm{e}^{\lambda+\mu} \frac{n!}{(\lambda+\mu)^n} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{\lambda^k\ \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^k\ (\lambda+\mu)^{n-k}} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

  On reconnaît la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$. □

IV. Calculs d'espérance

IV.1. Espérance de $Z = g(X,Y)$

Théorème 4 (Théorème de transfert)**.**
Soit (X, Y) *deux v.a. discrètes. Alors,* **sous réserve de convergence absolue***, on a :*

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x,y)\, \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Exemple
Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{i+j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!}$$

Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$.

Démonstration.
Ici, $Z = 2^{X+Y} = g(X,Y)$ pour $g : (x,y) \mapsto 2^{x+y}$.
a) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. On remarque que :

$$g(i,j)\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \ = \ \cancel{2^{i+j}} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ \cancel{2^{i+j}}\ i!\ j!} \ = \ \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$$

La série $\sum\limits_j \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est à termes positifs. Démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} \frac{(i+j)}{\mathrm{e}\ i!\, j!} \ &= \ \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{i}{\mathrm{e}\ i!} \ \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!} \ \frac{j}{j!} \right) \\
&= \ \frac{i}{\mathrm{e}\ i!} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!} \sum_{j=0}^{N} \frac{j}{j!}
\end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{(j-1)!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.
Ainsi la série $\sum\limits_j \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est convergente de somme :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!} \ = \ \frac{i}{\cancel{\mathrm{e}}\ i!}\ \cancel{\mathrm{e}} + \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}}\ i!}\ \cancel{\mathrm{e}} \ = \ \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$$

b) La série $\sum\limits_i \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$ étant à termes positifs, démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \ = \ \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!}$$

Or, comme vu précédemment : $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.
Ainsi la série $\sum\limits_i \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right)$ est convergente et on peut alors conclure :

$$\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!} \right) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \ = \ 2\ \mathrm{e}$$

□

IV.2. Espérance d'une somme

Proposition 5 (Linéarité de l'espérance)**.**

- *Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. discrètes admettant une espérance. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :*

$$\mathbb{E}(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{E}(X_i)$$

- *Lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 1$, on obtient le cas particulier :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Exercice 14
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Retrouver $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la linéarité de l'espérance.

Preuve.
On introduit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. discrètes, mutuellement indépendantes, telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Alors :

- $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ *($X_1 + \cdots + X_n$ compte le nombre de succès dans une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p)* ou on utilise la stabilité de la loi binomiale.
- Comme X et $X_1 + \cdots + X_n$ ont même loi, on a :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) \ = \ \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n\,p$$

□

IV.3. Espérance d'un produit

Théorème 5.
Soit (X, Y) deux v.a.r. discrètes. Alors on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Exercice 15
On reprend l'exemple 1 avec deux dés équilibrés à trois faces. On note toujours X le maximum des résultats et Y le minimum.
Déterminer la loi jointe de (X, Y) puis calculer $E(XY)$.

Preuve.
On a déjà déterminé la loi de (X, Y).

- $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
- On représente la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

- Les v.a.r. X et Y admettent chacune un moment à l'ordre 2 car elles sont finies.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \\
&= \sum_{i\in[\![1,3]\!]} \sum_{j\in[\![1,3]\!]} ij\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2} ij\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\,\in\,[\![1,3]\!]^2 \\ i>j}} ij\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j)\,\in\,[\![1,3]\!]^2 \\ i=j}} ij\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j)\,\in\,[\![1,3]\!]^2 \\ i<j}} ij\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= 0 + \sum_{\substack{(i,j)\,\in\,[\![1,3]\!]^2 \\ i=j}} i^2\ \frac{1}{9} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{3} ij\ \frac{2}{9} \\
&= \frac{1}{9}\ 14 + \frac{1}{9}\ 11 = \frac{36}{9} = 4
\end{aligned}$$

□

Théorème 6.
Si X et Y sont **indépendantes** *et admettent une espérance, alors XY admet une espérance et on a :*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Commentaire

On peut utiliser le théorème précédent pour montrer que deux v.a. discrètes ne sont pas indépendantes en vérifiant que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exemple
On reprend l'exemple 15 précédent.

a) On considère maintenant U et V les v.a.r. égales respectivement au résultat du 1^er^ dé et du 2^ème^ dé. Ces v.a.r. étant indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\ \mathbb{E}(V) = 2\times 2 = 4$$

On tombe bien sûr sur le résultat de $\mathbb{E}(XY)$
En effet, $X = \min(U,V)$ et $Y = \max(U,V)$. Donc :

$$XY = \min(U,V)\times\max(U,V) = UV$$

(cette constatation aurait pu nous éviter les précédents calculs ...)

b) Montrons que X et Y ne sont pas indépendantes.
Il suffit de vérifier que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Reprenons une nouvelle fois l'exercice précédent.
$\mathbb{E}(X) = \dfrac{14}{9}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{22}{9}$ donc $\mathbb{E}(XY) = 4 \neq \dfrac{14\times 22}{9^2} = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$
(il est simple d'obtenir la loi de X et celle de Y)
Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 16
Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre p.
Montrer que les v.a. $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

Ce théorème n'est pas une équivalence !!

Exemple
Prenons un exemple issu de `EML 2007`.

- U v.a.r. telle que :
  - × $U(\Omega) = \{-1, 1\}$.
  - × $\mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{2}$.
- Y v.a.r. telle que :
  - × $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  - × $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\ \mathrm{e}^{-n}$.
- On considère enfin $T = U \times Y$.

a) Les v.a.r. Y et $T = UY$ **ne sont pas indépendantes**. En effet :

$$\mathbb{P}([Y = 0] \cap [UY = 1]) \ = \ \mathbb{P}([U = 0] \cap [0 = 1]) \ = \ 0$$

puisque $[0 = 1] = \varnothing$. Or : $\mathbb{P}([Y = 0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([UY = 1]) \neq 0$.

b) • Calculer $\mathbb{E}(YT)$. Quel résultat cela illustre-t-il ?

$YT = Y\,UY = UY^2$
Or U et Y sont indépendantes.
Donc, d'après le lemme des coalitions, U et Y^2 sont indépendantes. Ces deux v.a.r. admettant une espérance (Y^2 admet une espérance car Y admet une variance). Ainsi :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ \mathbb{E}(UY^2) \ = \ \mathbb{E}(U)\ \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0 \times \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0$$

• De même : $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(U\,Y) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0$

Les v.a.r. T et Y ne sont pas indépendantes et pourtant :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ 0 \ = \ \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{E}(T)$$

V. Variance et covariance

V.1. Covariance

Définition (Covariance)
Soient (X, Y) deux v.a. discrètes admettant des moments d'ordre 2.
La *covariance* de X et Y est définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Théorème 7 (Formule de Koenig-Huygens)**.**
Soient (X, Y) deux v.a. discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

En particulier, on a :

$$\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$$

Preuve.

- Par définition :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \cancel{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} + \cancel{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

- $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X)$

□

Exercice 17
Déterminer la covariance des v.a. X et Y de l'exemple 15.

Démonstration.
X et Y admettent un moment d'ordre car ce sont des v.a.r. finies.
D'après la formule de Koenig-Huyghens,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 4 - \frac{14}{9} \times \frac{22}{9} = \frac{16}{81}$$

□

Proposition 6 (Propriétés de la covariance)**.**

1. Symétrie :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

2. Linéarité à gauche :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda \,\text{Cov}(X_1, Y) + \mu \,\text{Cov}(X_2, Y)$$

3. Linéarité à droite :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \,\text{Cov}(X, Y_1) + \mu \,\text{Cov}(X, Y_2)$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}(a, X) = 0$$

Preuve.

1. Par définition de la covariance,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y))(X-\mathbb{E}(X))) \\ &= \mathrm{Cov}(Y,X) \end{aligned}$$

2. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Soient X_1, X_2 et Y des v.a.r. admettant un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\lambda X_1+\mu X_2, Y) &= \mathbb{E}((\lambda X_1+\mu X_2)Y)-\mathbb{E}(\lambda X_1+\mu X_2)\mathbb{E}(Y) && \textit{(d'après la formule de Koenig-Huyghens)} \\ &= \mathbb{E}(\lambda X_1 Y+\mu X_2 Y)-\mathbb{E}(\lambda X_1+\mu X_2)\mathbb{E}(Y) \\ &= \lambda\mathbb{E}(X_1Y)+\mu\mathbb{E}(X_2Y)-(\lambda\mathbb{E}(X_1)+\mu\mathbb{E}(X_2))\mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \lambda\mathbb{E}(X_1Y)+\mu\mathbb{E}(X_2Y)-\lambda\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y)-\mu\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y) \\ &= \lambda(\mathbb{E}(X_1Y)-\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y))+\mu(\mathbb{E}(X_2Y)-\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \lambda\,\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mu\,\mathrm{Cov}(X_2,Y) && \textit{(d'après la formule de Koenig-Huyghens)} \end{aligned}$$

3. Idem point précédent

4. Soit $a\in\mathbb{R}$ et X une v.a.r. admettant un moment d'ordre 2. D'après la formule de Koenig-Huyghens, on a :

$$\mathrm{Cov}(a,X)=\mathbb{E}(aX)-\mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X)=a\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(a)\mathbb{E}(X)$$

Or $a\in\mathbb{R}$, donc $\mathbb{E}(a)=a$. D'où $\mathrm{Cov}(a,X)=0$.

□

Exercice 18
Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2 et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Montrer que : $\mathbb{V}(X+\lambda Y)=\mathbb{V}(X)+2\lambda\,\mathrm{Cov}(X,Y)+\lambda^2\mathbb{V}(Y)$.

Proposition 7.
Soient X et Y des v.a.r. admettant un moment d'ordre 2.

$$X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes} \;\Rightarrow\; \mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

Preuve.
On utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Or les v.a.r. X et Y sont indépendantes, donc $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Finalement, on a bien $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. □

⚠ La réciproque est fausse !

Exemple
On tire au hasard un point dans le plan parmi les 4 points suivants : $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ et $(-1,0)$.
On note X la variable aléatoire correspondant à l'abscisse du point choisi et Y son ordonnée.
Alors on peut vérifier (par un calcul trivial) que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$. De plus le produit XY est toujours nul (v.a. déterministe) donc $\mathbb{E}(XY) = 0$. D'où $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

Mais par ailleurs :

$$\mathbb{P}([X=1])\mathbb{P}([Y=1]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\text{et} \quad \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) = 0 \neq \frac{1}{16}$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

V.2. Variance d'une somme

Théorème 8.

1. *SI X et Y admettent une variance, alors $X+Y$ également et*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)$$

2. *Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, alors $X+Y$ aussi et on a :*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

3. *Si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et admettent une variance, alors la v.a. $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et on a :*

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

Preuve.

1. • On remarque :

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$$

Or X et Y admettent une variance (donc un moment d'ordre 2), donc X^2, XY et Y^2 admettent une espérance.
Par linéarité, $(X+Y)^2$ admet une espérance, *i.e.* $X+Y$ admet une variance.

• Pour la relation, on utilise la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2] - (E(X+Y))^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 + Y^2 + 2XY\right) - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) + 2\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

2. Si X et Y sont indépendantes, alors on a montré que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.
Donc, d'après le point précédent, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

3. Généralisation directe du point précédent (récurrence)

□

Commentaire

On peut calculer facilement la variance d'une $\mathcal{B}(n,p)$ à partir du théorème précédent.
En effet, une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut s'écrire comme la somme de n v.a. indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Chacune de ces v.a. a pour variance $p(1-p)$. La variance de la binomiale vaut donc $np(1-p)$.

Exemple
Reprenons l'exemple 15 des dés à 3 faces.

1. On rappelle que si $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

On note toujours U le résultat du premier dé et V le résultat du second.
Calculer $\mathbb{V}(U+V)$ puis en déduire la valeur de $\mathbb{V}(X+Y)$.

2. Déterminer enfin $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Preuve.

1. Comme U et V sont indépendantes et admettent une variance :

$$\mathbb{V}(U+V) \; = \; \mathbb{V}(U) + \mathbb{V}(V) \; = \; \frac{3^2-1}{12} + \frac{3^2-1}{12} \; = \; \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \; = \; \frac{4}{3}$$

En effet, $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$.

on remarque que :

$$X + Y = \min(U, V) + \max(U, V) = U + V$$

Ainsi, $X + Y$ admet une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}(X+Y) \; = \; \mathbb{V}(U+V) \; = \; \frac{4}{3}$$

2. Par définition :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \\ &= 4 - \frac{14}{9}\,\frac{22}{9} \; = \; \frac{4 \times 9^2 - 14 \times 22}{9^2} \\ &= \frac{324 - 308}{9^2} \; = \; \frac{16}{9^2} \end{aligned}$$

3. Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 1}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \; = \; \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \\ &= \frac{9 \times 26}{9^2} - \frac{14^2}{9^2} \; = \; \frac{234 - 196}{9^2} \; = \; \frac{38}{9^2} \end{aligned}$$

On peut faire de même pour $\mathbb{V}(Y)$ $\left(= \dfrac{9 \times 58 - 22^2}{9^2}\right)$ ou remarquer :

$$\mathbb{V}(Y) \; = \; \mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - 2\operatorname{Cov}(X, Y) \; = \; \frac{8}{3} - \frac{38}{9^2} - \frac{32}{9^2} \; = \; \frac{38}{9^2}$$

□

V.3. Coefficient de corrélation linéaire

Définition (Coefficient de corrélation linéaire)
Soit (X, Y) un couple de v.a ; discrètes admettant des variances non nulles.

Le *coefficient de corrélation linéaire de* X *et de* Y est

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proposition 8.

1. $|\rho(X, Y)| \leqslant 1$.
2. $\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow$ *une des v.a.r. est une fonction affine strictement croissante de l'autre v.a.r.*
3. $\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow$ *une des v.a.r. est une fonction affine strictement décroissante de l'autre v.a.r.*

Commentaire

- Les valeurs intermédiaires entre -1 et 1 renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux v.a. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les v.a. est forte.
- Deux v.a. dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.

Exercice 19
Déterminons le coefficient de corrélation linéaire des v.a. X et Y de l'exemple 15.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = \frac{\frac{16}{9^2}}{\sqrt{\frac{38}{9^2}}\sqrt{\frac{38}{9^2}}} = \frac{16}{\cancel{9^2}}\frac{\cancel{9^2}}{38} = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}$$

Exercice 20 (Essec II 2001)
Soient X et Y deux v.a. discrètes admettant un moment d'ordre 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Développer $V(X + \lambda Y)$ puis, en s'aidant du signe du polynôme en λ obtenu, montrer que :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$$

2. Préciser les cas d'égalité dans la relation précédente.
3. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1. Préciser les cas d'égalité.