Convergence et approximations de v.a.r.

I. Inégalités de concentration

I.1. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 1 (Inégalité de Markov).
Soit X une v.a.r. qui admet une espérance.
On suppose de plus que : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (i.e. X est presque sûrement positive ou nulle). Alors :

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Preuve.
Soit $a > 0$. Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$\begin{array}{rccl} Y & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{array} \right. \end{array}$$

Listons quelques propriétés de Y :

- $Y(\Omega) = \{0, a\}$ (Y est donc une v.a.r. finie).
- $[Y = a] = [X \geqslant a]$ (puisque $Y = a \Leftrightarrow X \geqslant a$).
- $[Y = 0] = [X < a]$ (puisque $Y = 0 \Leftrightarrow X < a$).

1) Comme Y est finie, Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \underset{\mathbb{P}([X < a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y = 0])}} + a \times \underset{\mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y = a])}} = a \times \mathbb{P}([X \geqslant a])$$

2) On remarque aussi que : $Y \leqslant X$. En effet :

× si $X \geqslant a$ alors $Y = a \leqslant X$.
(plus précisément : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant a \Rightarrow Y(\omega) = a$)

× si $X < a$ alors $Y = 0 \leqslant X$.
(plus précisément : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) < a \Rightarrow Y(\omega) = 0$)

3) Par croissance de l'espérance, on déduit des deux points précédents que :

$$\underset{a\,\mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}(Y)}} \leqslant \mathbb{E}(X)$$

On conclut en divisant de part et d'autre par $a > 0$.

□

Commentaire

On pourrait faire cette preuve plus rapidement avec des fonctions indicatrices.

Soit $a \geqslant 0$, Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{array}{ccccc} X(\omega) & = & X(\omega)\ \mathbb{1}_{[X \leqslant a]}(\omega) & + & X(\omega)\ \mathbb{1}_{[X \geqslant a]}(\omega) \\ & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} \\ & & 0 & & a\ \mathbb{1}_{[X \geqslant a]}(\omega) \\ & & \text{car } X \text{ v.a.r. positive} & & \text{car } X(\omega) \geqslant a \end{array}$$

Ainsi : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant a\, \mathbb{1}_{[X \geqslant a]}(\omega)$. D'où :

$$X \ \geqslant\ a\, \mathbb{1}_{[X \geqslant a]}$$

Par croissance puis linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}[X] \ \geqslant\ \mathbb{E}[a\, \mathbb{1}_{[X \geqslant a]}] = a\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}] = a\, \mathbb{P}([X \geqslant a]).$$

Commentaire

Cette démonstration de cours est telle quelle une question Essec II 2013.

Commentaire

- Si $a \leqslant \mathbb{E}(X)$, alors $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a} \geqslant 1$.
  L'inégalité, dans ce cas, n'apporte rien puisque : $\mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant 1 \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.
  En revanche, si a est « grand » par rapport à $\mathbb{E}(X)$, on obtient un résultat de bon sens : la probabilité que X prenne de grandes valeurs est d'autant plus faible que celles-ci excèdent $\mathbb{E}(X)$.
- Dans le théorème, nous n'avons pas précisé si X est une v.a.r. à densité ou discrète. La démonstration est valide dans les deux cas.
- Mieux : la démonstration est aussi valable lorsque X est un v.a.r. quelconque (ni discrète, ni à densité). Le seul passage subtil de la démonstration est alors la croissance de l'espérance, opérateur seulement défini pour les v.a.r. discrètes et à densité dans le programme d'ECE.
- On rappelle qu'il existe une théorie mathématique qui définit une notion d'espérance valable pour toute v.a.r. (discrète, à densité, ou autres). L'opérateur ainsi défini vérifie les propriétés classiques de l'espérance, notamment la linéarité et la croissance.

Théorème 2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).
Soit X une v.a.r. qui admet une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left([|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. On considère la v.a.r. $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$.
Comme X admet une variance, la v.a.r. Y admet une espérance.
Ainsi, en appliquant l'inégalité de Markov à Y, avec $a = \varepsilon^2$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\left(\left[|Y| \geqslant \varepsilon^2\right]\right) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} & & \\ \parallel & & \parallel & & \\ \mathbb{P}\left(\left[(|X - \mathbb{E}(X)|)^2 \geqslant \varepsilon^2\right]\right) & & \dfrac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2} & = & \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \end{array}$$

Or, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\left[(|X - \mathbb{E}(X)|)^2 \geqslant \varepsilon^2\right] = [|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon]$$

D'où :

$$\mathbb{P}([|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

□

Commentaire

- Ce résultat est une inégalité de concentration. Grâce à ce type d'inégalité, on peut mesurer / contrôler la probabilité qu'un phénomène aléatoire puisse s'écarter (on préférera le terme dévier) de la moyenne *i.e.* d'un comportement standard.
- Évidemment, il est rare de constater de grandes déviations. La question que se pose une compagnie d'assurances est de savoir si elle est prête à parier sur le fait qu'une grande déviation (*i.e.* un événement qui s'écarte fortement de la norme) ne se produira pas. Il est alors primordial dans ce cas d'obtenir des inégalités de concentration avec un majorant le plus précis possible.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est peu précise. L'un des raisons est qu'elle s'applique à toute v.a.r. . On peut évidemment obtenir de meilleures majorations en tirant parti des propriétés (*i.e.* de la loi) des v.a.r. étudiées.

Exercice 1
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\bar{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Démonstration.

1. La v.a.r. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Donc : $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{V}(X_i) = p(1-p)$.

2. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}[\mathbb{E}(X_1) + \ldots \mathbb{E}(X_n)] = p.$$

Par indépendance des variables aléatoires $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et les propriétés de la variance, on obtient :

$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \frac{1}{n^2}[\mathbb{V}(X_1)+\ldots\mathbb{V}(X_n)] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

3. La fonction $f : p \mapsto p(1-p)$ est une fonction polynomiale (donc dérivable sur $\mathbb{R}$) de dérivée $f' : p \mapsto 1-2p$. On a alors le tableau de variations suivant :

p	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(p)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

On a bien $p(1-p) \leqslant 1/4$.

4. La v.a.r. $\overline{X}_n$ possède un moment d'ordre 2. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors :

$$\mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2 n}.$$

□

Commentaire

Le résultat de l'exercice précédent justifie *a posteriori* notre façon d'introduire la notion de probabilité, *i.e.* comme étant la limite de la fréquence d'apparition de l'événement donné.

Exercice 2

On tire 3 600 fois un dé équilibré. Évaluer la probabilité que le nombre de 1 soit compris entre 540 et 660.

Démonstration.

1. On note S_n le nombre de 1 obtenus en $n = 3\,600$ lancers.
L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de succès S :

S : « on obtient 1 au lancer de dé »

Comme le dé est équilibré : $\mathbb{P}(S) = \dfrac{1}{6}$.

La v.a.r. S_n est associée au nombre de succès de cette expérience.

Elle suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$. On a alors :

$$\mathbb{E}(S_n) = 3\,600 \times \frac{1}{6} = 600 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = 3\,600 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 500$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon]) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{P}([|S_n - 600| > \varepsilon]) & & \dfrac{500}{\varepsilon^2} \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([|S_n - 600| > \varepsilon]) &= 1 - \mathbb{P}([|S_n - 600| \leqslant \varepsilon]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([-\varepsilon \leqslant S_n - 600 \leqslant \varepsilon]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([600 - \varepsilon \leqslant S_n \leqslant 600 + \varepsilon])
\end{aligned}$$

D'où :

$$1 - \mathbb{P}([600 - \varepsilon \leqslant S_n \leqslant 600 + \varepsilon]) \leqslant \frac{500}{\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}([600 - \varepsilon \leqslant S_n \leqslant 600 + \varepsilon]) \geqslant 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}$$

3. On choisit alors $\varepsilon = 60$ et on obtient :

$$\mathbb{P}([540 \leqslant S_n \leqslant 660]) \geqslant 1 - \frac{500}{(60)^2} = 1 - \frac{500}{3\,600} = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

Donc la probabilité que le nombre de 1 soit compris entre 540 et 660 est supérieure à $\dfrac{31}{36}$.

□

I.2. Loi faible des grands nombres

Théorème 3.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.* **indépendantes**, *de* **même espérance** m *et de* **même variance** σ^2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. *Alors on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

On dit que $\bar{X}_n$ converge en probabilité *vers la variable constante égale à* m.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$.
On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $X = \bar{X}_n$. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

Or, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{\cancel{n}\,m}{\cancel{n}} = m$$

et, puisque les v.a. (X_i) sont indépendantes,

$$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\cancel{n}\sigma^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\bar{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Exemple *(classique)*

- On considère un dé non truqué.
  L'expérience consiste à effectuer une succession infinie de lancers.
- On note X_i la v.a.r. :
  - $\times$ égale à 1 si on obtient 6 lors du $i^{\text{ème}}$ lancer (considéré comme le succès de l'expérience),
  - $\times$ égale à 0 sinon (échec de l'expérience).

  Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{6}\right)$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite de variables
  - $\times$ indépendantes (le résultat d'un lancer ne dépend pas des précédents),
  - $\times$ de même espérance $p = \dfrac{1}{6}$,
  - $\times$ de même variance $\sigma^2 = p\ (1-p)$.

  On en déduit, par la loi faible des grands nombres que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p \right| \geqslant \varepsilon \right) = 0.$$

- La v.a.r. $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ est la fréquence d'apparition de la face 6 au cours des n premiers lancers. La loi faible des grands nombres affirme que, plus n est grand, plus la fréquence d'apparition du 6 au cours des n lancers (moyenne empirique) est proche de la fréquence théorique avec une forte probabilité (moyenne théorique, *i.e.* espérance).

II. Convergence en loi

II.1. Définition et premières propriétés

Définition (Convergence en loi)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n.
Soit X une v.a. et F_X sa fonction de répartition.
On dit que la suite (X_n) *converge en loi* vers la v.a. X si pour tout t **où F_X est continue**,

$$F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$$

On note alors : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X$.

Exercice 3

1. Soit X une v.a. à densité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = e^{\frac{1}{n}} X$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une v.a. X_n qui suit une loi uniforme sur $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Démonstration.

1. À faire.

2. On note X la v.a.r. certaine égale à 0. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On rappelle également que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\dfrac{1}{n} \\ \dfrac{x+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} & \text{si } x \in \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

a) On commence par identifier les points de continuité de F_X.
Ici, F_X est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Soit $x \in]-\infty, 0[$.
On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $x < -\dfrac{1}{n}$.

Soit $n \geqslant n_0$. On a donc : $x < -\dfrac{1}{n}$.
Ainsi, par définition de F_{X_n} : $F_{X_n}(x) = 0$. On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0 = F_X(x)$.

c) Soit $x \in]0, +\infty[$.
On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $x > \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \geqslant n_0$. On a donc : $x > \dfrac{1}{n}$.
Ainsi, par définition de F_{X_n} : $F_{X_n}(x) = 1$. On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 1 = F_X(x)$.

Finalement, on a bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est continue : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Ainsi : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X$. □

Proposition 1.
Soit (X_n) une suite de v.a.r. . Alors :

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([a < X_n \leqslant b]) = \mathbb{P}([a < X_n \leqslant b])$$

Théorème 4.
Soit (X_n) une suite de v.a. **discrètes** *et X une v.a.* **discrète** *telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$). Alors :*

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \ \textit{(reps. } \mathbb{Z}\textit{)},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$$

⚠ Certaines suites de v.a. discrètes convergent en loi vers une v.a.r. à densité ! Il est donc essentiel dans ce théorème de savoir que X est une v.a. **discrète**.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$.
On suppose que les variables $X_1, X_2, \dots$ sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de X_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel x :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Montrer l'équivalent : $\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

3. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

× si $x < \frac{1}{n}$, alors $[X_n \leqslant x] = \varnothing$ car $X_n(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$. Ainsi :

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \geqslant 1$, alors $[X_n \leqslant x] = \Omega$ car $X_n(\Omega) = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}$. Ainsi :

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

× si $\frac{1}{n} \leqslant x < 1$.

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) = \sum_{k \in [\![1,n]\!] \ / \ \frac{k}{n} \leqslant x} \mathbb{P}([X_n = k])$$

D'une part, comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\}\right)$, alors : $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{n}$.

D'autre part :

$$\frac{k}{n} \leqslant x \ \Leftrightarrow \ k \leqslant n\,x \ \Leftrightarrow \ k \leqslant \lfloor n\,x \rfloor \quad \text{car } k \in \mathbb{N}$$

On obtient donc :

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor n\,x \rfloor} \frac{1}{n} = \frac{\lfloor n\,x \rfloor}{n}$$

2. Soit $x > 0$.
Par définition de $\lfloor x \rfloor$: $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. D'où : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{x-1}{x} & < & \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} & \leqslant & 1 \\ {\scriptstyle x \to +\infty} \downarrow & & & & {\scriptstyle x \to +\infty} \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

Donc, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. On en déduit que : $\lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

3. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) On identifie les points de continuité de F_X.
Ici, F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On fait une disjonction de cas suivant la définition de F_X.

× Soit $x \leqslant 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < \dfrac{1}{n}$.
Donc, par définition de F_n : $F_n(x) = 0 = F_X(x)$.

× Soit $x \geqslant 1$. Alors, par définition de F_n : $F_n(x) = 1 = F_X(x)$.

× Soit $x \in \,]0,1[$.
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $x > \dfrac{1}{n}$.
Soit $n \geqslant n_0$. On a donc : $x > \dfrac{1}{n}$.
Ainsi, par définition de F_n : $F_n(x) = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
Or, d'après la question précédente : $\lfloor nx \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} nx$. D'où :

$$F_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$$

On en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = x = F_X(x)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = F_X(x)$. Donc : $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} X$.

□

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de v.a. telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la v.a. certaine égale à 0.

II.2. Variable centrée réduite associée à une variable X

Définition (Rappel)

Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée *la variable aléatoire centrée réduite associée à X*.

Exercice 6

1. Montrer que : $\mathbb{E}(X^*) = 0$ et $\mathbb{V}(X^*) = 1$.

2. Soit (X_n) une suite de v.a., indépendantes et de même loi, de même espérance m et de même variance σ^2 non nulle. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

Montrer que $S_n^* = \bar{X}_n^*$.

II.3. Théorème central limite

Théorème 5 (Théorème central limite)**.**
Soit (X_n) *une suite de v.a.* **indépendantes et de même loi**, *de même espérance* m *et de même variance* σ^2 *non nulle. On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad \bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\right)$$

- *Alors la suite* $(\bar{X}_n^*)$ *converge en loi vers une v.a. de loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$.
- *On note* Φ *la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$*, on a donc pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\bar{X}_n^* \leqslant x\right]\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

ou encore, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leqslant b$*,*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b\right]\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Commentaire

- Comme $S_n = \sqrt{n}\sigma\bar{X}_n^* + nm$, ce théorème exprime l'idée que, pour n assez grand, la v.a. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$.
- Ce théorème nous permet d'obtenir une **approximation** de la probabilité $\mathbb{P}([a \leqslant S_n \leqslant b])$ en écrivant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([a \leqslant S_n \leqslant b]) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant \bar{X}_n^* \leqslant \frac{b - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right]\right) \\ &\approx \mathbb{P}\left(\left[\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant N \leqslant \frac{b - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right]\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) \end{aligned}$$

  où $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- **En pratique**, pour $n \geqslant 30$, on pourra approcher la loi de $\bar{X}_n^*$ par la loi normale centrée réduite.

Exercice 7
On lance 3 600 fois un dé.
Évaluer la probabilité que le nombre d'apparition du 1 soit compris entre 540 et 660.
On donne $\dfrac{6}{\sqrt{5}} \approx 2,68$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (exercice 2).

Démonstration.

- On considère un dé non truqué.
  L'expérience consiste à effectuer une succession de $n = 3\,600$ lancers.
- On note X_i la v.a.r. :
  - égale à 1 si on obtient 1 lors du $i^{\text{ème}}$ lancer (considéré comme le succès de l'expérience),
  - égale à 0 sinon (échec de l'expérience).

  Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$.

- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite de variables
  - × indépendantes (le résultat d'un lancer ne dépend pas des précédents),
  - × de même espérance $p = \dfrac{1}{6}$,
  - × de même variance $\sigma^2 = p\,(1-p) = \dfrac{5}{36}$.
- On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Alors :

$$\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\frac{1}{n}\,S_n - m}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{S_n - n\,m}{\sigma\,n} = \frac{S_n - n\,m}{\sigma\,\sqrt{n}}$$

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. D'après le théorème central limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\left[a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b\right]) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \Phi(b) - \Phi(a) & \simeq & \mathbb{P}\left(\left[a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[a \leqslant \dfrac{S_n - n\,m}{\sigma\,\sqrt{n}} \leqslant b\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left([a\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n - n\,m \leqslant b\sigma\sqrt{n}]\right) & \textit{(car } \sigma\sqrt{n} > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left([nm + a\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant nm + b\sigma\sqrt{n}]\right) & \end{array}$$

- Dans notre cas : $n = 3\,600$, $m = \dfrac{1}{6}$ et $\sigma = \sqrt{\dfrac{5}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$. On obtient alors :

$$\Phi(b) - \Phi(a) \simeq \mathbb{P}\left(\left[600 + 10\sqrt{5}a \leqslant S_n \leqslant nm + 10\sqrt{5}b\right]\right)$$

- On souhaite connaître une valeur approchée de : $\mathbb{P}\left([540 \leqslant S_n \leqslant 660]\right)$.

  On choisit donc a tel que $10\sqrt{5}a = -60$ et $10\sqrt{5}b = 60$. On obtient $a = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ et $b = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

  Finalement, on a donc :

$$\mathbb{P}([540 \leqslant S_n \leqslant 660]) \simeq \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\right) = 2\,\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - 1$$

  Or, par lecture de la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) \simeq \Phi(2,68) \simeq 0,9963$$

  D'où : $\mathbb{P}([540 \leqslant S_n \leqslant 660]) \simeq 0,9926$.
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans l'exercice 2, on a obtenu :

$$\mathbb{P}([540 \leqslant S_n \leqslant 660]) \geqslant \frac{31}{36} \simeq 0,8611$$

  On constate que :
  - × le théorème central limite donne une estimation plus précise de $\mathbb{P}([540 \leqslant S_n \leqslant 660])$.
  - × l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit cependant une minoration valable pour toute réalisation de S_n.

□

III. Approximation de variables aléatoires

III.1. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Théorème 6.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Alors : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Preuve.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, \frac{\lambda^k}{n^k} \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \, \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

- $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{n^k} = 1$
- Notons $u_n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda}{n} = 0$, donc : $\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\lambda}{n}$.

  D'où : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\dfrac{\lambda}{\cancel{n}}\right) = -\lambda$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\lambda$.

  Or la fonction exp est continue en $-\lambda$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{-\lambda}$.
- Enfin, comme $1 - \dfrac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])$$

où X est une v.a. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Comme (X_n) est une suite de v.a.r. discrètes et X est une v.a.r. discrète, alors on a bien montré :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$$

□

Commentaire

- **En pratique**, pour $n \geqslant 30$, et $p \leqslant 0,1$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$.
- L'approximation est d'autant meilleure que n est grand et p petit. La v.a.r. X considérer consiste alors à faire le décompte d'événements rares. Dans ces conditions, la loi de Poisson permet de modéliser des phénomènes alétoires qui se produisent de manière peu fréquente.

Exercice 8
Soit X une v.a. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(100, 0.05)$.
Calculer $\mathbb{P}([X=2])$ de manière exacte puis donner une valeur approchée avec le théorème précédent.

Démonstration.

- Par définition de la loi binomiale :

$$\mathbb{P}([X=2]) = \binom{100}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{98} \simeq 0.0812$$

- On approche la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\,p)$, *i.e.* $\mathcal{P}(5)$ (on se l'autorise car $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0.1$). On obtient alors :

$$\mathbb{P}([X=2]) \simeq \frac{5^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-5} \simeq 0.0842$$

□

Exercice 9
Une entreprise fabrique des lecteurs DVD. Après la fabrication de ces lecteurs, l'entreprise effectue des contrôles, à la suite desquels $0,06\%$ des lecteurs restent défectueux. On considère un lot de n lecteurs contrôlés, et on note X_n le nombre de lecteurs qui restent défectueux.
Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ?
Pour $n = 500$, par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X_n ? En déduire une approximation de la probabilité qu'il reste au moins quatre lecteurs défectueux parmi 500 lecteurs contrôlés ?

III.2. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Théorème 7.
Soit $p \in]0,1[$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On note $q = 1-p$. Alors :

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Commentaire

En pratique, pour $n \geqslant 30$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, npq)$.

Commentaire

Si $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec n et p tels qu'on peut approcher S_n par $N_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, npq)$, on devrait écrire :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) \approx \mathbb{P}([N_n = k])$$

mais comme N_n est une v.a. à densité, on a $\mathbb{P}([N_n = k]) = 0$, donc notre approximation ci-dessus n'est pas bonne. On écrira plutôt :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) \approx \mathbb{P}([k - 0,5 < N_n < k + 0,5])$$

On appelle cela utiliser la *correction de continuité.*

Exercice 10
Soit X une v.a. qui suit la loi $\mathcal{B}(900, 0.5)$. Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([405 \leqslant X \leqslant 495])$.

Démonstration.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, où $n = 900$ et $p = \dfrac{1}{2}$, alors en particulier : $n \geqslant 30$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$.

D'après le théorème central limite, on peut donc approcher $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ par $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On en déduit : $X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}\, X^* + \mathbb{E}(X) = \sqrt{npq}\, X^* + np$.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([405 \leqslant X \leqslant 495]) & = & \mathbb{P}(\big[405 \leqslant \sqrt{npq}\, X^* + np \leqslant 495\big]) \\
& \simeq & \mathbb{P}(\big[405 \leqslant \sqrt{npq}\, Z + np \leqslant 495\big]) \\
& = & \mathbb{P}([405 \leqslant 15\, Z + 450 \leqslant 495]) \\
& = & \mathbb{P}([-45 \leqslant 15\, Z \leqslant 45]) \\
& = & \mathbb{P}([-3 \leqslant Z \leqslant 3]) \\
& = & \Phi(3) - \Phi(-3) \ = \ \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) \\
& = & 2\Phi(3) - 1 \ \simeq \ 0,9973
\end{array}$$

□

Exercice 11 *Extrait de HEC 2003 - Maths II*
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

1. On considère la variable $X^* = \dfrac{2X - n}{\sqrt{n}}$. Donner l'espérance et la variance de la variable X^*.

2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X^* si n est assez grand ?

Montrer qu'alors une valeur approchée de la probabilité $\mathbb{P}([X \geqslant N])$ est $\Phi\left(\dfrac{n + 1 - 2N}{\sqrt{n}}\right)$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Démonstration.

1. • On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X^*) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{2X-n}{\sqrt{n}}\right) & \\ & = & \dfrac{2\,\mathbb{E}(X)-n}{\sqrt{n}} & \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{\cancel{2}\times n\times \frac{1}{\cancel{2}}-n}{\sqrt{n}} & \left(\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)\right) \\ & = & \dfrac{\cancel{n}-\cancel{n}}{\sqrt{n}} \ = \ 0 & \end{array}$$

• On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(X^*) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{2X-n}{\sqrt{n}}\right) \ = \ \mathbb{V}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\,X-\sqrt{n}\right) & \\ & = & \dfrac{4}{n}\,\mathbb{V}(X) & \text{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{4}{\cancel{n}}\times\cancel{n}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} & \left(\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)\right) \\ & = & 1 & \end{array}$$

2. Si n est assez grand ($n \geqslant 30$), alors, d'après le théorème central limite, on peut approcher la loi de X^* par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
On note Z une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On commence par remarquer que :

$$X^* = \frac{2X-n}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{2}(\sqrt{n}\,X^*+n)$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \geqslant N]) & = & \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant N-\dfrac{1}{2}\right]\right) & \text{(car } X \text{ est une v.a.r. discrète)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{2}(\sqrt{n}\,X^*+n) > N-\dfrac{1}{2}\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\sqrt{n}\,X^*+n > 2N-1]) & \\ & = & \mathbb{P}([\sqrt{n}\,X^* > 2N-1-n]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X^* > \dfrac{2N-1-n}{\sqrt{n}}\right]\right) & \\ & \simeq & \mathbb{P}\left(\left[Z > \dfrac{2N-1-n}{\sqrt{n}}\right]\right) & \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \dfrac{2N-1-n}{\sqrt{n}}\right]\right) & \\ & = & 1-\Phi\left(\dfrac{2N-1-n}{\sqrt{n}}\right) & \\ & = & \Phi\left(-\dfrac{2N-1-n}{\sqrt{n}}\right) \ = \ \Phi\left(\dfrac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right) & \end{array}$$

□

III.3. Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Théorème 8.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)$*. Alors :* $S_n^* = \dfrac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X$*, où* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$*.*

Commentaire

En pratique, pour $\lambda \geqslant 18$, on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Exercice 12
Soit X une v.a. qui suit la loi $\mathcal{P}(64)$. Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \leqslant 74])$.

Démonstration.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda = 64$, alors en particulier : $\lambda \geqslant 18$.

D'après le théorème central limite, on peut donc approcher $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ par $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

On en déduit : $X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}\, X^* + \mathbb{E}(X) = \sqrt{\lambda}\, X^* + \lambda$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant 74]) &= \mathbb{P}(\left[\sqrt{\lambda}\, X^* + \lambda \leqslant 74\right]) \\
&\simeq \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{\lambda}\, Z + \lambda \leqslant 74\right]\right) \\
&= \mathbb{P}([8\, Z + 64 \leqslant 74]) \\
&= \mathbb{P}([8\, Z \leqslant 10]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{5}{4}\right]\right) \;=\; \Phi\left(\frac{5}{4}\right) \;\simeq\; 0,8944
\end{aligned}$$

□

Exercice 13 *Extrait de ESSEC 2007 - Maths II*
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $5k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.
On note α l'unique réel vérifiant $\Phi(\alpha) = 0,99$. Justifier que $0,01$ est une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left[X - 5k > \alpha\sqrt{5k}\right]\right)$, lorsque k est grand.

Démonstration. On note X^* la v.a.r. centrée réduite associée à X : $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$.

- On sait que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(5k)$. Donc : $E(X) = 5k$ et $\mathbb{V}(X) = 5k$.
  On obtient alors : $X^* = \dfrac{X - 5k}{\sqrt{5k}}$.
- Lorsque k est grand (ici lorsque $k \geqslant 4$), d'après le théorème central limite, on peut approcher la loi de X^* par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
  On note Z une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left[X - 5k > \alpha\sqrt{5k}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X - 5k}{\sqrt{5k}} > \alpha\right]\right) \;=\; \mathbb{P}([X^* > \alpha]) \\
&\simeq \mathbb{P}([Z > \alpha]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([Z \leqslant \alpha]) \\
&= 1 - \Phi(\alpha) \;=\; 0,01
\end{aligned}$$

On a bien que $0,01$ est une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left[X - 5k > \alpha\sqrt{5k}\right]\right)$.

□