Suite des noyaux et images itérés (HP)

Exercice 1
On considère E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère f un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

A) Suite des noyaux itérés

1. Démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}\left(f^i\right) \subset \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Ker}\left(f^r\right) = \text{Ker}\left(f^{r+1}\right)$$

Démontrer : $\forall i \in [\![r, +\infty[\![$, $\text{Ker}\left(f^i\right) = \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note : $d_i = \dim\left(\text{Ker}\left(f^i\right)\right)$.

a) Démontrer que la suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est monotone.

b) En procédant par l'absurde, démontrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.

c) En déduire que la suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

B) Suite des images itérées

1. Démontrer : $\forall j \in \mathbb{N}$, $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \text{Im}\left(f^j\right)$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Im}\left(f^{s+1}\right) = \text{Im}\left(f^s\right)$$

Démontrer : $\forall j \in [\![s, +\infty[\![$, $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) = \text{Im}\left(f^j\right)$.

3. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note : $m_j = \dim\left(\text{Im}\left(f^j\right)\right)$.

a) Démontrer que la suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est monotone.

b) Démontrer : $m_{r+1} = m_r$ (où r est l'entier défini en question ***A.3.b)***).

c) En déduire que la suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

A. Suite des noyaux itérés

1. Démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}\left(f^i\right) \subset \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in \text{Ker}\left(f^i\right)$. Ainsi, $f^i(x) = 0_E$.
En appliquant f de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f\left(f^i(x)\right) & = & f\left(0_E\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ f^{i+1}(x) & & 0_E \end{array} \quad \textit{(car } f \textit{ est une application linéaire)}$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \text{Ker}\left(f^i\right) \subset \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)}$$

□

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Ker}\left(f^r\right) = \text{Ker}\left(f^{r+1}\right)$$

Démontrer : $\forall i \in [\![r, +\infty[\![$, $\text{Ker}\left(f^i\right) = \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall i \in [\![r, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(i)$
où $\mathcal{P}(i)$: $\text{Ker}\left(f^i\right) = \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.

- **Initialisation** :
  Par hypothèse : $\text{Ker}\left(f^r\right) = \text{Ker}\left(f^{r+1}\right)$.
  D'où $\mathcal{P}(r)$.
- **Hérédité** : soit $i \in [\![r, +\infty[\![$.
  Supposons $\mathcal{P}(i)$ et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$ $\Big($*i.e.* $\text{Ker}\left(f^{i+1}\right) = \text{Ker}\left(f^{i+2}\right)\Big)$.
  On démontre cette égalité en procédant par double inclusion.
  ($\subset$) On obtient ce résultat en appliquant la propriété de la question ***A.1.*** au rang $i+1$.

($\supset$) Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{i+2}\right)$. Ainsi, $f^{i+2}(x) = 0_E$.
Par définition de f^{i+2} :

$$f^{i+1}\big(f(x)\big) = 0_E$$

On en déduit : $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.
Or, par hypothèse de récurrence : $\operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.
Ainsi, $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$, ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} f^i\big(f(x)\big) & = & 0_E \\ \shortparallel & & \\ f^{i+1}(x) & & \end{array}$$

Et ainsi, $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$.
D'où $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall i \in [\![r, +\infty[\![,\ \operatorname{Ker}\left(f^i\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right).}$$ □

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note : $d_i = \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f^i\right)\big)$.

a) Démontrer que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}$. D'après la question ***A.1.*** :

$$\operatorname{Ker}\left(f^i\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f^i\right)\big) & \leqslant & \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f^{i+1}\right)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ d_i & & d_{i+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in \mathbb{N},\ d_i \leqslant d_{i+1}. \text{ La suite } (d_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante.}}$$ □

b) En procédant par l'absurde, démontrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.

Démonstration.
On procède par l'absurde.
Supposons : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ d_i \neq d_{i+1}$.
La suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$d_i < d_{i+1}$$

Ainsi, $(d_i)_{i\in[\![0,n+1]\!]}$ est une famille strictement croissante d'entiers positifs (pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, $d_i = \dim\big(\operatorname{Ker}(f^i)\big) \in \mathbb{N}$).
On en déduit :

$$d_{n+1} \ \geqslant\ n+1$$

Or, par définition : $\operatorname{Ker}\left(f^{n+1}\right) \subset E$. On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f^{n+1}\right)\big) & \leqslant & n \\ \shortparallel & & \\ d_{n+1} & & \end{array}$$

Et par suite : $n \geqslant d_{n+1} \geqslant n+1$. Absurde !

$$\boxed{\text{Il existe donc bien } r \in [\![0, n]\!] \text{ tel que : } d_r = d_{r+1}.}$$ □

c) En déduire que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Démonstration.

- D'après la question ***A.1.*** :

$$\operatorname{Ker}\left(f^r\right) \ \subset\ \operatorname{Ker}\left(f^{r+1}\right)$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{ccc} d_r & = & d_{r+1} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f^r\right)\big) & & \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f^{r+1}\right)\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \operatorname{Ker}\left(f^r\right) = \operatorname{Ker}\left(f^{r+1}\right).}$$

- On applique alors le résultat de la question ***A.2.*** :

$$\forall i \in [\![r, +\infty[\![,\ \text{Ker}\left(f^i\right) = \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$$

Ce qui permet de conclure :

$$\forall i \in [\![r, +\infty[\![,\ d_i = \dim\left(\text{Ker}\left(f^i\right)\right) = \dim\left(\text{Ker}\left(f^{i+1}\right)\right) = d_{i+1}$$

$$\boxed{\text{La suite } (d_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est donc stationnaire.}}$$

□

B. Suite des images itérées

1. Démontrer : $\forall j \in \mathbb{N}$, $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \text{Im}\left(f^j\right)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$.
Soit $y \in \text{Im}\left(f^{j+1}\right)$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f^{j+1}(x)$. Ainsi :

$$y = f^{j+1}(x) = f^j\left(f(x)\right)$$

et donc $x \in \text{Im}\left(f^j\right)$.

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ \text{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \text{Im}\left(f^j\right)}$$

□

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Im}\left(f^{s+1}\right) = \text{Im}\left(f^s\right)$$

Démontrer : $\forall j \in [\![s, +\infty[\![$, $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) = \text{Im}\left(f^j\right)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall j \in [\![s, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(j)$
où $\mathcal{P}(j)$: $\text{Im}\left(f^{j+1}\right) = \text{Im}\left(f^j\right)$.

▸ **Initialisation** :
Par hypothèse : $\text{Im}\left(f^{s+1}\right) = \text{Im}\left(f^s\right)$.
D'où $\mathcal{P}(s)$.

▸ **Hérédité** : soit $j \in [\![s, +\infty[\![$.
Supposons $\mathcal{P}(j)$ et démontrons $\mathcal{P}(j+1)$ $\left(\textit{i.e.}\ \text{Im}\left(f^{j+2}\right) = \text{Im}\left(f^{j+1}\right)\right)$.
On démontre cette égalité en procédant par double inclusion.

($\subset$) On obtient ce résultat en appliquant la propriété de la question ***B.1.*** au rang $i+1$.

($\supset$) Soit $y \in \text{Im}\left(f^{j+1}\right)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f^{j+1}(x) = 0_E$. Ainsi :

$$y = f^{j+1}(x) = f\left(f^j(x)\right)$$

On a : $f^j(x) \in \text{Im}\left(f^j\right)$.
Or, par hypothèse de récurrence : $\text{Im}\left(f^j\right) = \text{Im}\left(f^{j+1}\right)$. Ainsi :

$$f^j(x) \in \text{Im}\left(f^j\right) = \text{Im}\left(f^{j+1}\right)$$

Il existe donc $z \in E$ tel que : $f^j(x) = f^{j+1}(z)$. Et enfin :

$$y = f\left(f^j(x)\right) = f\left(f^{j+1}(z)\right) = f^{j+2}(z)$$

Et ainsi, $y \in \text{Im}\left(f^{j+2}\right)$.
D'où $\mathcal{P}(j+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall j \in [\![s, +\infty[\![,\ \text{Im}\left(f^{j+1}\right) = \text{Im}\left(f^j\right).}$$ □

3. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note : $m_j = \dim\left(\text{Im}\left(f^j\right)\right)$.

a) Démontrer que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question ***B.1.*** :

$$\text{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \text{Im}\left(f^j\right)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \dim\left(\text{Im}\left(f^{j+1}\right)\right) & \leqslant & \dim\left(\text{Im}\left(f^j\right)\right) \\ \parallel & & \parallel \\ m_{j+1} & & m_j \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in \mathbb{N},\ m_{j+1} \leqslant m_j. \text{ La suite } (m_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante.}}$$ □

b) Démontrer : $m_{r+1} = m_r$ (où r est l'entier défini en question ***A.3.b)***).

Démonstration.

- En appliquant le théorème du rang à $f^r \in \mathscr{L}(E)$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^r\right)\right) & + & \dim(\operatorname{Im}\left(f^r\right)) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ n & = & d_r & + & m_r \end{array}$$

- De la même façon, en considérant maintenant $f^{r+1} \in \mathscr{L}(E)$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^{r+1}\right)\right) & + & \dim(\operatorname{Im}\left(f^r\right)) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ n & = & d_{r+1} & + & m_{r+1} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} m_{r+1} & = & n - d_{r+1} & \\ & = & n - d_r & \textit{(par définition de } r\textit{)} \\ & = & m_r & \textit{(d'après l'égalité du premier point)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } m_{r+1} = m_r.}$$

□

c) En déduire que la suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Démonstration.

- D'après la question ***B.1.*** :

$$\operatorname{Im}\left(f^{r+1}\right) \subset \operatorname{Im}\left(f^r\right)$$

- Or, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{ccc} m_{r+1} & = & m_r \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^{r+1}\right)\right) & & \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^r\right)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \operatorname{Im}\left(f^{r+1}\right) = \operatorname{Ker}\left(f^r\right).}$$

- On applique alors le résultat de la question ***B.2.*** :

$$\forall j \in [\![r, +\infty[\![, \ \operatorname{Im}\left(f^{j+1}\right) = \operatorname{Im}\left(f^j\right)$$

Ce qui permet de conclure :

$$\forall j \in [\![r, +\infty[\![, \ m_{j+1} = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^{j+1}\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^j\right)\right) = m_j$$

$$\boxed{\text{La suite } (m_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est donc stationnaire.}}$$

□

Commentaire

- Dans cet exercice, on a démontré que :
  - × la suite $\left(\operatorname{Ker}\left(f^i\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion) et stationnaire à partir d'un certain rang $r \in [\![0, n]\!]$.
  - × la suite $\left(\operatorname{Im}\left(f^j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) et stationnaire à partir du même rang $r \in [\![0, n]\!]$.
- Plus précisément, en procédant par l'absurde, on a démontré qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ à partir duquel la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Évidemment, cette suite est aussi stationnaire à partir de n'importe quel rang plus grand que r. Autrement dit, r n'est pas défini de manière unique. Généralement, parmi tous les entiers vérifiant cette propriété, on distingue celui qui est le plus pertinent, à savoir le plus petit à partir duquel la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
- L'étude de la suite des noyaux itérés est un grand classique des mathématiques. Il est de ce fait assez fréquent qu'une partie de cette démonstration (cela peut se limiter à un inclusion $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2)$) soit présente aux concours dans les exercices d'algèbre théorique que l'on trouve dans les épreuves `HEC`.