

Suite des noyaux et images itérés (HP)

Exercice 1

On considère E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

A) Suite des noyaux itérés

1. Démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1})$$

Démontrer : $\forall i \in \llbracket r, +\infty \llbracket, \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$.

3. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note : $d_i = \dim(\text{Ker}(f^i))$.

a) Démontrer que la suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est monotone.

b) En procédant par l'absurde, démontrer qu'il existe $r \in \llbracket 0, n \llbracket$ tel que : $d_r = d_{r+1}$.

c) En déduire que la suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

B) Suite des images itérées

1. Démontrer : $\forall j \in \mathbb{N}, \text{Im}(f^{j+1}) \subset \text{Im}(f^j)$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Im}(f^{s+1}) = \text{Im}(f^s)$$

Démontrer : $\forall j \in \llbracket s, +\infty \llbracket, \text{Im}(f^{j+1}) = \text{Im}(f^j)$.

3. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note : $m_j = \dim(\text{Im}(f^j))$.

a) Démontrer que la suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est monotone.

b) Démontrer : $m_{r+1} = m_r$ (où r est l'entier défini en question **A.3.b**).

c) En déduire que la suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.