Propriétés des lois Gamma, gamma et d'Erlang (HP)

Avant-propos : loi de la somme de v.a.r. à densité

Théorème 1.

Soient X et Y deux v.a.r. de denistés repesctives f_X et f_Y.

On suppose que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

On considère la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ f_Y(x-t)\ dt$.

On suppose que la fonction h est (définie et) continue sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

Alors la v.a.r. $X+Y$ est une v.a.r. à densité et h est une densité de $X+Y$.

Remarque

- La fonction h, si elle existe, est appelée **produit de convolution** des fonctions f_X et f_Y. On note généralement cette fonction $f_X * f_Y$.
- Le produit de convolution est commutatif. Autrement dit, sous réserve d'existence, on a :

$$\boxed{f_X * f_Y = f_Y * f_X}$$

  Ce qui s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ f_Y(x-t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)\ f_Y(t)\ dt$$

  (il suffit pour cela de poser le changement de variable $\boxed{u = x-t}$)

Remarque (CULTURE)

- Si la fonction f_Y est bornée, il est simple de démontrer que la fonction h existe. Démontrons-le.
  Supposons que la fonction f_Y est bornée. Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad |f_Y(v)| \ \leqslant \ M$$

  On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  × $\forall t \in \mathbb{R}, \ 0 \ \leqslant \ f_X(t)\, f_Y(x-t) \ \leqslant \ M\ f_X(t)\ (*)$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt$ est convergente car la fonction f_X est une densité de probabilité. Il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} M\ f_X(t)\ dt$.

  Ainsi, par le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ f_Y(x-t)\ dt$ est convergente.
- Si la fonction f_X est bornée, alors, en reprenant le raisonnement précédent, on démontre l'existence de la fonction $f_Y * f_X$. Or, par commutativité du produit de convolution, cela démontre l'existence de $f_X * f_Y$.
  Ainsi, le caractère borné de l'une ou l'autre des fonctions f_X ou f_Y assure l'existence du produit de convolution $f_X * f_Y$.
- L'intégrande $u_x : t \mapsto f_X(t)\, f_Y(x-t)$ fait apparaître un paramètre x. On dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ f_Y(x-t)\ dt$ est une intégrale à paramètre.
  Le théorème classique pour démontrer la continuité de la fonction $f_X * f_Y$: $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ f_Y(x-t)\ dt$ requiert l'étude de la continuité des fonctions $t \mapsto u_x(t)$ (pour tout x) et $x \mapsto u_x(t)$ (pour tout t).
  S'ajoute de plus une hypothèse de domination du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \ |u_x(t)| \ \leqslant \ g(t)$$

  où la fonction g est elle-même continue et est l'intégrande d'une intégrale convergente. Dans le cas où f_X (resp. f_Y) est bornée, l'inégalité $(*)$ permet d'établir cette hypothèse de domination.

`À RETENIR`

- Sous les hypothèses du théorème, la somme $X+Y$ de deux v.a.r. **à densité** et **indépendantes** est une v.a.r. à densité dont une densité est le produit de convolution $f_X * f_Y$.
- Le caractère borné de la fonction f_X (resp. f_Y) est un cadre idéal pour établir les hypothèses du théorème.

I. La fonction Gamma

I.1. Définition

Définition
On note Γ la fonction définie par :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

I.2. Propriétés

Théorème 2.
La fonction Γ vérifie les propriétés suivantes.

1) *La fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$.*

2) $\boxed{\Gamma(1) = 1}$

3) $\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$

4) *On déduit des propriétés précédentes :* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!}$

Remarque

- La propriété *4)* établit que la fonction Γ prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des réels strictement positifs.
- Toutes ces propriétés peuvent se démontrer dans le cadre du programme `ECE` (*cf* TD).

II. Loi gamma

II.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi gamma** de paramètre $\alpha > 0$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]0,+\infty[}$

  b) Lav.a.r. X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty,0] \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\ t^{\alpha-1}\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in]0,+\infty[\end{cases} \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ pour signifier que X suit la loi gamma de paramètre α.

Remarque
On vérifie aisément que f_X est bien une densité de probabilité :

1) f est continue sur $]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.

3) Remarquons tout d'abord :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt \ = \ \int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt$$

car f_X est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
La fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente : on reconnaît la définition de $\Gamma(\alpha)$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt \ = \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \ = \ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \ = \ 1$$

II.2. Espérance et variance

Théorème 3.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$ $(\alpha > 0)$.

Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \alpha}$

1) *X admet une variance.*

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = \alpha}$

Remarque

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$. Il est simple de démontrer que la v.a.r. X admet des moments à tout ordre $r \in \mathbb{N}$.
  Il suffit de remarquer que pour tout $t > 0$:
  $$t^r \ f_X(t) \ = \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \ t^{\alpha+r-1} \ \mathrm{e}^{-t}$$
  Or, d'après l'étude de la fonction Γ, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha+r-1} \ \mathrm{e}^{-t} \ dt$ est convergente et de valeur $\Gamma(\alpha+r)$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t) \ dt$ est convergente. Ainsi, X admet un moment d'ordre r donné par :
  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^r) \ &= \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+r-1} \ \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ &= \ \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \ = \ \frac{(\alpha+r-1)\,(\alpha+r-2)\,\ldots\,\alpha \ \cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \end{aligned}$$
- En particulier, $\mathbb{E}(X) = \alpha$ (cas $r = 1$) et $\mathbb{E}(X^2) = (\alpha+1)\,\alpha$ (cas $r = 2$). Ainsi, par la formule de Kœnig-Huygens :
  $$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \alpha\,(\alpha+1) - \alpha^2 \ = \ \alpha$$

II.3. Stabilité par somme des lois gamma

Théorème 4.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Soit X_1 une v.a.r. telle que $X_1 \hookrightarrow \gamma(\alpha_1)$.

Soit X_2 une v.a.r. telle que $X_2 \hookrightarrow \gamma(\alpha_2)$.

On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\alpha_1 + \alpha_2)$.

Démonstration.
En exercice (ci-dessous). □

Exercice

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. de lois respectives $\gamma(\alpha_1)$ et $\gamma(\alpha_2)$. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Enfin, pour tout $\alpha > 0$, on note h_α et f_α les fonctions définies par :

$$h_\alpha : t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t^{\alpha-1} \ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \end{array} \right.$$

et $f_\alpha = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \ h_\alpha$ (f_α est une densité de la loi $\gamma(\alpha)$).

1. a) On suppose $\alpha \neq 1$. Démontrer que la fonction h_α admet un maximum sur $]0, +\infty[$ en un point à déterminer.

b) En déduire que la fonction h_α est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer qu'il en est de même dans le cas où $\alpha = 1$.

2. Démontrer que la v.a.r. $X_1 + X_2$ est à densité. On note $f_{X_1+X_2}$ une densité de cette v.a.r. . Que vaut $f_{X_1+X_2}$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$?

3. a) Pour tout $x > 0$, démontrer :

$$\int_0^x t^{\alpha_1-1} \ (x-t)^{\alpha_2-1} \ dt \ = \ x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 u^{\alpha_1-1} \ (1-u)^{\alpha_2-1} \ du$$

b) En déduire que pour tout $x > 0$, $f_{X_1+X_2}(x)$ s'écrit sous la forme :

$$f_{X_1+X_2}(x) = c \times f_{\alpha_1+\alpha_2}(x)$$

où c est une constante qui sécrit en fonction d'une intégrale.

c) Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{X_1+X_2}(x)\, dx$? En déduire la valeur de c et conclure.

III. Loi Gamma

III.1. Densité

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi Gamma** de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]0, +\infty[}$

  b) Lav.a.r. X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X \ : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$ pour signifier que X suit la loi Gamma de paramètres α et β.

Lien avec les lois usuelles

- On peut tout d'abord remarquer :

$$\boxed{\Gamma(1, \lambda) \ = \ \mathcal{E}\left(\lambda\right)}$$

- La loi gamma est un cas particulier de la loi Gamma. Plus précisément :

$$\boxed{\Gamma(\alpha, 1) \ = \ \gamma(\alpha)}$$

Remarque

On vérifie aisément que f_X est bien une densité de probabilité :

1) f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.

3) Remarquons tout d'abord, comme f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} f_X(t)\ dt$$

La fonction f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Sous réserve de convergence, on obtient, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \beta\, t}$:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\beta\, t} \ = \ \frac{1}{\beta^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-u}\ du$$

Cela démontre la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t)\ dt$ et enfin :

$$\int_0^{+\infty} f_X(t)\ dt \ = \ \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{\cancel{\beta^\alpha}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-u}\ du \ = \ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \ = \ 1$$

III.2. Espérance et variance

Théorème 5.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$).
Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}}$

1) *X admet une variance.*

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}}$

Remarque

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$. On peut démontrer que la v.a.r. X admet des moments à tout ordre $r \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on procède comme avec les lois γ. Enfin, pour le calcul, on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^r) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{r+\alpha-1}\ \mathrm{e}^{-\beta\, t}\ dt \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\beta}\right)^{r+\alpha-1} \mathrm{e}^{-u}\ \frac{1}{\beta}\ du \\
&= \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{\beta^{r+\cancel{\alpha}}} \int_0^{+\infty} u^{r+\alpha-1}\ \mathrm{e}^{-u}\ du \\
&= \frac{1}{\beta^r}\ \mathbb{E}(Y^r) \qquad\qquad \textit{(où } Y \hookrightarrow \gamma(\alpha)\textit{)} \\
&= \frac{\alpha\,(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)}{\beta^r}
\end{aligned}$$

- En particulier, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (cas $r = 1$) et $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{\alpha\,(\alpha+1)}{\beta^2}$ (cas $r = 2$).
Ainsi, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

III.3. Stabilité par somme des lois Gamma

Théorème 6.

Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit X_1 *une v.a.r. telle que* $X_1 \hookrightarrow \Gamma(\alpha_1, \beta)$.
Soit X_2 *une v.a.r. telle que* $X_2 \hookrightarrow \Gamma(\alpha_2, \beta)$.
On suppose de plus que X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*
Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Remarque
La démonstration est similaire à celle du cas de la loi γ.

IV. Loi d'Erlang

IV.1. Densité

Définition

On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi d'Erlang** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ si :

a) $\boxed{X(\Omega) =]0, +\infty[}$

b) La v.a.r. X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X : \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\ t^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{array}\right. \end{array}\right.$$

Lien avec les précédentes lois

- Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$. La loi d'Erlang de paramètres n et λ n'est donc rien d'autre que la loi $\Gamma(n, \lambda)$ où n est un entier naturel.
- La loi d'Erlang étant une loi Gamma pour des paramètres particuliers, tous les résultats sur la loi d'Erlang se déduisent de l'étude réalisée sur la loi Gamma.

IV.2. Espérance et variance

Théorème 7.

Soit X *une v.a.r. telle que* $X \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$ *(*$n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda > 0$*).*
Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n}{\lambda}}$

1) *X admet une variance.*

2) $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{n}{\lambda^2}}$

IV.3. Stabilité par somme des lois d'Erlang

Théorème 8.

Soient $(n_1, n_2) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit X_1 *une v.a.r. telle que* $X_1 \hookrightarrow \Gamma(n_1, \lambda)$.

Soit X_2 *une v.a.r. telle que* $X_2 \hookrightarrow \Gamma(n_2, \lambda)$.

On suppose de plus que X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(n_1 + n_2, \lambda)$.

Théorème 9.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. :*

× *indépendantes,*

× *de même loi* $\mathcal{E}(\lambda)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Alors $S_n \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$.

Démonstration.
L'étude de la loi Gamma étant faite, il suffit de rappeler : $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.
Ainsi, par la stabilité par somme des lois Gamma, on obtient, par une récurrence immédiate :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \Gamma(n, \lambda)$$

□

Loi d'Erlang et concours

Il est relativement fréquent de faire l'étude de la loi d'Erlang dans les énoncés du `TOP 3`. Plus précisément :

× `ESSEC-III 2007` : la loi d'Erlang $\Gamma(n, \lambda)$ apparaît comme somme de n v.a.r. indépendantes de lois $\mathcal{E}(\lambda)$.

× `ESSEC-II 2010` : on considère une v.a.r. T qui représente la durée de vie d'un système. On appelle fiabilité la fonction de survie de T. On démontre des résultats généraux sur la fiabilité qu'on illustre sur plusieurs lois différentes pour T : loi $\mathcal{E}(\mu)$, loi d'Erlang $\Gamma(n, \beta)$ et loi de Weibull.

× `HEC 2012` : on considère initialement une v.a.r. qui suit une loi de Weibull. On démontre alors que $\lambda\sqrt{X}$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$. La loi d'Erlang $\Gamma(n, 1)$ apparaît alors comme somme de n v.a.r. indépendantes de lois $\mathcal{E}(1)$.

× `HEC 2014` : sans citer explicitment la loi d'Erlang, on note J_n la fonction de répartition de la loi d'Erlang $\Gamma(n+1, 1)$. On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ une somme de v.a.r. indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{P}(1)$ (ainsi, $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$). On démontre alors : $\mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = 1 - J_n(n)$ et $\mathbb{P}([S_n \geqslant n]) = J_{n-1}(n)$.