Variables aléatoires indicatrices

Définition
Soit B un événement. On note $\mathbb{1}_B$ la variable aléatoire telle que

$$\mathbb{1}_B(\omega) \; = \; \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

La v.a.r. $\mathbb{1}_B$ est appelée *variable aléatoire indicatrice de l'événement B.*

Proposition 1.
Soit B un événement.

$$\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(B)\right)$$

Démonstration.

- Par définition de $\mathbb{1}_B$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 ou 1.

$$\boxed{\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0, 1\}}$$

- Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [\mathbb{1}_B = 1] \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in B$$

  D'où : $[\mathbb{1}_B = 1] = B$. Ainsi : $\mathbb{P}([\mathbb{1}_B = 1]) = \mathbb{P}(B)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(B)\right).}$$

□

Proposition 2.
Soient B et C deux événements.

$$\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $\omega \in B \cap C$, alors :
  × par définition de $\mathbb{1}_{B\cap C}$: $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1$,
  × comme $\omega \in B \cap C$, alors $\omega \in B$ ET $\omega \in C$.
  Donc, par définition de $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$: $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ ET $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 1 \times 1 = 1$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega)$.
- Si $\omega \in \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$, alors :
  × par définition de $\mathbb{1}_{B\cap C}$: $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0$.
  × comme $\omega \in \overline{B} \cup \overline{C}$, alors : $\omega \in \overline{B}$ OU $\omega \in \overline{C}$.
  Donc, par définition de $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_C$: $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ OU $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
  D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega) = 0$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0 = \mathbb{1}_B(\omega) \cdot \mathbb{1}_C(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) \times \mathbb{1}_C(\omega)$.

$$\boxed{\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C}$$

□

Proposition 3.
Soient B, C deux événements.

$$\mathbb{1}_{B\cup C} \; = \; \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_{B\cap C}$$

Démonstration.
À faire □

Corollaire 1.
Soient B et C deux événements **incompatibles**.

$$\mathbb{1}_{B\cup C} \; = \; \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $\omega \in B \cup C$, alors $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 1$.
De plus, si $\omega \in B \cup C$, alors $\omega \in B$ `OU` $\omega \in C$.
  – Si $\omega \in B$, alors $\omega \notin C$ car les événements B et C sont incompatibles.
  D'où $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
  Ainsi : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega) = 1 + 0 = 1$.
  – Si $\omega \in C$, alors $\omega \notin B$ car les événements B et C sont incompatibles.
  D'où $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
  Ainsi : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega) = 0 + 1 = 1$.
Finalement, si $\omega \in B \cup C$, alors : $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.

× si $\omega \in \overline{B \cup C} = \bar{B} \cap \bar{C}$, alors $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 0$.
De plus, si $\omega \in \bar{B} \cap \bar{C}$, alors $\omega \in \bar{B}$ `ET` $\omega \in \bar{C}$. Donc : $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ `ET` $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
D'où : $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = 0 = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{B\cup C}(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_C(\omega)$.
Ainsi : $\mathbb{1}_{B\cup C} = \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. □

Corollaire 2.
Soit B un événement.

$$\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} \; = \; 1$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $\omega \in B$, alors : $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$.
Comme de plus $B \cap \bar{B} = \varnothing$, alors $\omega \notin \bar{B}$. Donc : $\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 0$.
D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1 + 0 = 1$.

× si $\omega \in \bar{B}$, alors : $\mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1$.
Avec le même raisonnement que précédemment : $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$.
D'où : $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 0 + 1 = 1$.

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_B(\omega) + \mathbb{1}_{\bar{B}}(\omega) = 1$. Donc : $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1$. □