Applications linéaires

I. Généralités

Définition (Application linéaire)
Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle *application linéaire* toute fonction f de E dans F satisfaisant les propriétés suivantes : pour tout $(u_1, u_2) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$,
2. $f(\lambda \cdot u_1) = \lambda \cdot f(u_1)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Théorème 1 (Caractérisation des applications linéaires)**.**
Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
L'application f est linéaire ssi :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2)$$

Commentaire

De manière équivalente, on peut aussi montrer que f est linéaire avec la relation suivante :

$$\forall (u_1, u_2) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda \cdot u_1 + u_2) = \lambda \cdot f(u_1) + f(u_2)$$

Proposition 1.
Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall u \in E,\ f(-u) = -f(u)$
3. $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$,

$$f(\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdots u_n) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(u_n)$$

Preuve.

1. Soit $u \in E$.

$$f(0 \cdot u) = 0 \cdot f(u) = 0_F$$

2. Soit $u \in E$.

$$f(-u) = f((-1) \cdot u) = (-1) \cdot f(u) = -f(u)$$

3. Récurrence sur $n \geqslant 1$

□

Exemples

- L'application qui à tout $u \in E$ associe 0_F est une application linéaire de E dans F. Cette application est appelée application nulle.
- L'application qui à tout $u \in E$ associe u est une application linéaire de E dans E. Cette application est appelée application identité (notée parfois i ou id).

Application
Montrons que l'application de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

est une application linéaire.
Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) &= f\left(\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - 3(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1(2x_1 - 3z_1) + \lambda_2(2x_2 - 3z_2) \\ \lambda_1(x_1 + y_1 + z_1) + \lambda_2(x_2 + y_2 + z_2) \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 - 3z_1 \\ x_1 + y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2x_2 - 3z_2 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2)
\end{aligned}$$

Exercice 1

1. On considère l'application Φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

2. On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Définition (Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme)
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriels.

- Une application linéaire *de E dans E* ($f : E \to E$) est appelée *endomorphisme* de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.
- Une application linéaire *bijective* de E dans F, est appelée *isomorphisme* de E dans F. Lorsqu'il existe un isomorphisme entre deux espaces E et F, on dit qu'ils sont isomorphes.
- Un *endomorphisme bijectif* (isomorphisme de E dans E) est appelé *automorphisme* de E.

MÉTHODO

Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme de E, il faut :

- Prouver que f est linéaire.
- Vérifier : $\forall u \in E,\ f(u) \in E$.

Proposition 2.
Soient E et F deux espaces vectoriels.
L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
Ainsi, soient $(f_1, f_2) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 \in \mathscr{L}(E,F).$$

Preuve.
Soit $(f_1, f_2) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrons : $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soit $(u_1, u_2) \in E^2$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_1)\,(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) \\
= \ & \lambda_1 \cdot f_1\,(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) + \lambda_2 \cdot f_2\,(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2) \\
= \ & \alpha_1\,\lambda_1 \cdot f_1(u_1) + \alpha_2\,\lambda_1 \cdot f_1(u_2) + \alpha_1\,\lambda_2 \cdot f_2(u_1) + \alpha_2\,\lambda_2 \cdot g(u_2) && \textit{(par linéarité de } f \textit{ et de } g\textit{)} \\
= \ & \alpha_1 \cdot \big(\lambda_1 \cdot f_1(u_1) + \lambda_2 \cdot f_2(u_1)\big) + \alpha_2 \cdot \big(\lambda_1 \cdot f_1(u_2) + \lambda_2 \cdot f_2(u_2))\big) \\
= \ & \alpha_1 \cdot \big(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2\big)(u_1) + \alpha_2\big(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2\big)(u_2) && \textit{(par définition des lois + et } \cdot\textit{)}
\end{aligned}$$

L'application $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ est donc linéaire : $\mathscr{L}(E,F)$ est donc stable par combinaison linéaire. □

Proposition 3.
Soient E,F et G trois espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ u & \mapsto & g(f(u)) \end{array} \right. \in \mathscr{L}(E,G).$$

Proposition 4.
Si f est un isomorphisme de E dans F, alors l'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E. En particulier, f^{-1} est linéaire.

Commentaire

1. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$; $f^1 = f$; $f^2 = f \circ f$; $\cdots$; $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{L}(E)$.
2. Si f et g sont deux automorphismes de E alors $g \circ f$ est également un automorphisme de E et son application réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel réel.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que f et g commutent :

$$f \circ g = g \circ f$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, f^k et g commutent :

$$f^k \circ g = g \circ f^k$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

I.1. Noyau et image d'une application linéaire

Définition (Noyau et Image d'une application linéaire)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- On appelle *noyau de* f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) \ = \ \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

- On appelle *image de* f, noté $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f) \ = \ \{v \in F \mid \exists u \in E,\ f(u) = v\} \ = \ f\big(E\big).$$

Commentaire

On peut aussi définir le noyau et l'image d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ en disant que c'est le noyau et l'image de l'application linéaire f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

On pourra voir la notation $\mathrm{Im}(A)$ ou $\mathrm{Ker}(A)$.

Proposition 5.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :

× $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous espace vectoriel de E,*

× $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous espace vectoriel de F.*

Preuve.

- $\mathrm{Ker}(f)$:
  - $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ par définition.
  - $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f(0_E) = 0_F$
  - Soit $(u_1, u_2) \in (\mathrm{Ker}(f))^2$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, vérifions : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$, *i.e.* montrons : $f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) = 0_F$:

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) & = & \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2) & \textit{(car } f \textit{ est linéaire)} \\ & = & \lambda_1 \cdot 0_F + \lambda_2 \cdot 0_F & \textit{(car } u_1 \in \mathrm{Ker}(f) \textit{ et } u_2 \in \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \\ & = & 0_F & \end{array}$$

  Donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

  $\mathrm{Ker}(f)$ est donc un sous espace vectoriel de E.

- Im(f) :
  - Im(f) $\subset F$ par définition.
  - $0_F \in$ Im(f) car $f(0_E) = 0_F$
  - Soit $(v_1, v_2) \in (\mathrm{Im}(f))^2$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, vérifions : $v_3 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \in \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire :

$$\exists u_3 \in E, \quad f(u_3) \ = \ v_3.$$

Comme v_1 et v_2 appartiennent à Im(f), on sait alors :

$$\exists (u_1, u_2) \in E^2, \ f(u_1) = v_1 \ \text{ et } \ f(u_2) = v_2$$

Donc, comme f est linéaire :

$$v_3 \ = \ \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 \ = \ \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2) \ = \ f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2)$$

Donc en posant $u_3 = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$, on a bien $f(u_3) = v_3$, donc $v_3 \in \mathrm{Im}(f)$.

On conclut que Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.

□

Proposition 6 (Caractérisation de l'image).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) \ = \ \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right).$$

Preuve.
Montrons que $\mathrm{Im}(f) \ = \ \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$ par double inclusion.

- $\mathrm{Im}(f) \ \subset \ \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$:

Soit $v \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. De plus, $u \in E$, donc il s'écrit comme une combinaison linéaire de la base canonique, *i.e.* il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$$

Donc :

$$v = f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(e_k).$$

v est donc une combinaison linéaires des $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, donc $v \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$.

- $\mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right) \ \subset \ \mathrm{Im}(f)$:

Soit $v \in \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)$, donc v s'écrit comme combinaison linéaire des $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. Ainsi, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right)$$

donc en posant $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$, on a bien $f(u) = v$. On en déduit que $v \in \mathrm{Im}(f)$.

□

Application
Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout un système homogène.
Soit $f : \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par :

$$f \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} x - 2y + z + 2t \\ 2y - t \end{pmatrix}$$

Déterminons le noyau de f :

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
u \in \mathrm{Ker}(f) & \iff & f(u) = 0 \\
& \iff & \begin{pmatrix} x - 2y + z + 2t \\ 2y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 2y & + & z & + & 2t & = & 0 \\ & & 2y & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 2y & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z - t \\ y & = & \dfrac{1}{2} t \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ker}(f) & = & \{u \in E \mid f(u) = 0\} \;=\; \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z - t \text{ et } y = \dfrac{1}{2} t \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -z - t \\ \frac{1}{2} t \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \} \;=\; \{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;=\; \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$:

- × engendre $\mathrm{Ker}(f)$,
- × est libre, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Commentaire

En fait, déterminer le noyau d'une application f dont la matrice associée est A revient à résoudre le système homogène ayant pour matrice associée A.

Application
Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on détermine simplement l'espace engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par :

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+2z \\ x-2y-z \\ x-y \end{pmatrix}$$

- La base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

  Donc, par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

  On a de plus :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Donc : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Déterminons alors une base de $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

  On remarque déjà :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  la famille est donc liée, ainsi :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

  Ainsi : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

  On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$:

  × engendre $\mathrm{Im}(f)$,

  × est libre, car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

  C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 7 (Caractérisation des applications injectives/ surjectives)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

1. *f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ *(i.e. $\forall u \in E,\ f(u) = 0_F \Rightarrow u = 0_E$).*

2. *f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$*.*

Preuve.

1. On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f est injective alors, par définition :

$$(u_1, u_2) \in E^2,\ f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$$

Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$.
Alors $f(u) = 0_F = f(0_E)$, *i.e.* $f(u) = f(0_E)$.
Donc, comme f est injective, $u = 0_E$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Soient $(u_1, u_2) \in E^2$ tel que $f(u_1) = f(u_2)$, alors par linéarité de f :

$$f(u_1) = f(u_2) \ \Leftrightarrow\ f(u_1) - f(u_2) = 0_F \ \Leftrightarrow\ f(u_1 - u_2) = 0_F \ \Leftrightarrow\ u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$$

On en déduit que $u_1 - u_2 = 0_F$ donc $u_1 = u_2$, *i.e.* f est injective.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f est surjective, alors pour tout $v \in F$, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$.
Donc $v \in \mathrm{Im}(f)$. On en déduit : $\mathrm{Im}(f) = F$.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Im}(f) = F$.
Soit $v \in F$. Alors $v \in \mathrm{Im}(f)$.
Donc, par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que : $v = f(u)$.
On en déduit que f est surjective.

□

Proposition 8.
Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

f est injective $\Leftrightarrow$ *L'image par f de toute famille libre finie de E est une famille (finie) libre de F.*

f est surjective $\Leftrightarrow$ *L'image par f de toute famille génératrice finie de E est une famille (finie) génératrice de F.*

f est bijective $\Leftrightarrow$ *L'image par f de toute base finie de E est une base (finie) de F.*

Théorème 2.
Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie.
S'il existe un isomorphisme de E vers F alors $\dim(E) = \dim(F)$*.*

I.2. Rang d'une application linéaire

Définition (Rang d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *rang de l'application linéaire* f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ si celle-ci existe

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(f)$ est bien défini.

Théorème 3 (Théorème du rang)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie et F espace vectoriel quelconque. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$

Le théorème du rang permet d'obtenir des informations sur l'image de f connaissant des informations sur son noyau et inversement. On l'utilise généralement de la manière suivante ;

1. On commence par déterminer une base du noyau (ou de l'image) de f et donc sa dimension.

2. Connaissant la dimension de l'espace E, on en déduit grâce au théorème du rang la dimension de l'image (ou du noyau) de f.

Exercice 3
On considère l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer le noyau de Φ.

c. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

d. Vérifier que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 9.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- *f est injective* $\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
- *f est surjective* $\iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Théorème 4 (Caractérisation des isomorphismes)**.**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel tels que $\dim(E) = \dim(F)$*, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

soit

$$f \text{ est bijective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Dans ce cas, f est un isomorphisme de E vers F.

Exemple
L'application linéaire

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c, a+d, b-c, d) \end{array} \right.$$

est-elle un isomorphisme ? un automorphisme ?

I.3. Cas particulier des matrices

Définition (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors l'application

$$f \ : \ \begin{cases} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{cases}$$

est une application linéaire, dite application linéaire canoniquement associée à A.

Preuve.
On commence par vérifier la bonne définition de f. Si $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors le produit matriciel AX est bien défini et est une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La propriété de linéarité est automatiquement vérifiée par les propriétés du calcul matriciel :
Soient $(X_1, X_2) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2) = A(\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2) = \lambda_1 \cdot A\, X_1 + \lambda_2 \cdot A\, X_2 = \lambda_1 \cdot f(X_1) + \lambda_2 \cdot f(X_2).$$

□

Définition (Noyau d'une matrice)
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle *noyau* de A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}.$$

Définition (Image d'un matrice)
Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle *image* de A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right).$$

Ainsi on retrouve la définition du *rang* de la matrice A :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Im}(A)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right)\right).$$

Théorème 5 (Théorème du rang)**.**
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = p.$$

Proposition 10 (Caractérisation de l'inversibilité)**.**
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$. Alors

$$A \textit{ est inversible} \iff \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \iff \mathrm{rg}(A) = n$$

Exemple
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.

2. Calculer AU.

3. En déduire $\mathrm{Ker}(A)$.

II. Applications linéaires et matrices

Dans cette section, on considère E et F deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. On note aussi $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$.

II.1. Matrice associée à une application linéaire

Définition (Vecteur colonne associé à une base)
$\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ étant une base de E, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_p \cdot e_p$$

- Le p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ représente les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$.
- Le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ s'appelle le **vecteur colonne associé à u dans la base** $\mathcal{B}_E$. Ce vecteur est noté :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$
On parle alors de la matrice colonne de u dans la base $\mathcal{B}_E$.

Exemple
Soit $P(X) = 2(X-1)^2 - 3(X-1) - 4$.

1. Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?

2. Quel est le vecteur colonne associé à P dans la base $(1, (X-1), (X-1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

Proposition 11.
Avec les notations de la définition précédente, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ & & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Montrons que l'application φ est linéaire.
Soit $(u, v) \in E^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Comme $(u, v) \in E^2$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :
$$u \ = \ x_1 \cdot e_1 + \dots + x_p \cdot e_p \quad \text{et} \quad v \ = \ y_1 \cdot e_1 + \dots + y_p \cdot e_p$$
Ainsi :
  × d'une part :
$$\varphi(u) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(v) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \ = \ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$
  × d'autre part, comme :
$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot u + \mu \cdot v & = & \lambda \cdot \big(x_1 \cdot e_1 + \dots + x_P \cdot e_p\big) + \mu \cdot \big(y_1 \cdot e_1 + \dots + y_p \cdot e_p\big) \\ & = & (\lambda\, x_1 + \mu\, y_1) \cdot e_1 + \dots + (\lambda\, x_p + \mu\, y_p) \cdot e_p \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 + \mu\, y_1 \\ \vdots \\ \lambda\, x_p + \mu\, y_p \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) + \mu \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \\
&= \lambda \cdot \varphi(u) + \mu \cdot \varphi(v)
\end{aligned}$$

On en déduit que l'application φ est linéaire.

- Montrons que l'application φ est injective, *i.e.* montrons : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.
  Soit $u \in E$. Alors il existe $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :
  $$u = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_p \cdot e_p$$
  On obtient :
  $$\begin{aligned}
  u \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(u) = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \\
  &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \\
  &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
  &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0 \\
  &\Leftrightarrow u = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_p = 0_E
  \end{aligned}$$
  Ainsi : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$. D'où φ est injective.
- On sait maintenant :
  × φ est une application linéaire injective,
  × $\dim(E) = \dim\left(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right) = p$ (dimension finie).
  On en déduit que φ est bijective.

Finalement, φ est une application linéaire bijective, *i.e.* un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. □

Définition (Matrice d'une application linéaire)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
$\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ étant une base de F, pour tout vecteur $f(e_j) \in F$ ($j \in [\![1, p]\!]$), il existe un unique n-uplet $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ tel que :
$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{n,j} f_n$$

- On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice, notée $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, définie par
  $$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$
- Il s'agit de la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne donne les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$.
- Si E et F sont de même dimension finie n (c'est notamment le cas lorsque $E = F$), la matrice associée à f est une matrice carrée de taille n.

Commentaire

- Les coordonnées des $f(e_j)$ étant uniques, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ associée à f est unique.
- Réciproquement, à toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E, la matrice associée à f est une matrice carrée de taille n.

MÉTHODO

Pour déterminer la matrice associée à une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$, on calcule simplement l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_E$.

Exemple

Soit f l'application linéaire suivante :

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ 2y+3z \\ -x+y+z \\ -2x+2z \end{pmatrix}$$

Déterminer sa matrice représentative de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans celle de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On calcule :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{4,1}}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{4,1}}\left(f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{4,1}}\left(f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice représentative de f de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans celle de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{3,1},\mathscr{B}4,1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

II.2. Utilisation de la matrice d'une application linéaire

Souvent une application linéaire f est définie par sa matrice A dans les bases canoniques. On passe alors par une étude de la matrice A pour en déduire certaines propriétés de f.

Théorème 6.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soit $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Soient $(u,v) \in E \times F$, de représentation matricielle $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v)$.

- *Alors :*

$$v = f(u) \Leftrightarrow Y = AX$$

- *En particulier : $u \in \ker f \Leftrightarrow AX = 0$.*

On retiendra :

$$\mathrm{Mat}_{B_F}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{B_E}(u)$$

Exercice 4

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère le polynôme $P(X) = 3X^2 - 2X + 1$. Calculer $f(P)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Commentaire

Il est fréquent qu'une application linéaire f soit donnée seulement par sa matrice dans certaines bases. Lorsque l'on doit calculer $f(u)$, on doit alors jongler avec les notations.

Exercice 5

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On note : $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$.
On pose enfin : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Vérfier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont égaux à 2.

`MÉTHODO`

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$. Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$, on peut

- soit déterminer les images $(f(e_1, \ldots, f(e_n))$ à l'aide de leurs coordonnées représentées par les colonnes de la matrice A puis écrire $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$
- soit commencer par déterminer $\mathrm{Im}(A)$ puis en déduire $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 12 (Noyau d'une application linéaire)**.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$. On a :

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0 \iff AX = 0 \iff X \in \mathrm{Ker}(A).$$

En particulier, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

`MÉTHODO`

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective,

- on peut faire un raisonnement direct et montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- lorsqu'on connaît la matrice de f, il est souvent plus simple de raisonner matriciellement en montrant que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.

Théorème 7.
Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.
On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

- *Les applications*

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{cases} \quad \textit{et} \quad \psi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \end{cases}$$

  sont des isomorphismes.
  En particulier, la matrice d'une combinaison linéaire d'applications est la combinaison linéaire des matrices des applications : si $(f_1, f_2) \in (\mathscr{L}(E,F))^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = \lambda_1 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f_1) + \lambda_2 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f_2).$$

- *D'autre part, on a :*

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np \quad \textit{et} \quad \dim(\mathscr{L}(E)) = n^2.$$

Proposition 13.
Soient E, F, et G trois espaces vectoriels de dimension finie munis des bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

- *La composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées. Ainsi, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

- *Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f^k) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f))^k$$

Proposition 14.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ sa matrice relative à la base de $\mathscr{B}_E$.

1.

$$f \textit{ est bijectif} \iff A \textit{ est inversible}$$

2. Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la base $\mathscr{B}_E$: $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f^{-1})$.

`MÉTHODO`

- Lorsqu'on dispose d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base, pour savoir si l'endomorphisme est bijectif, il suffit de regarder si sa matrice est inversible.
- On pourra notamment penser à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer si A est inversible.

`MÉTHODO`

Étudier l'inversibilité d'une matrice A revient à étudier son noyau. En effet, on :

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow f \text{ est bijectif } \Leftrightarrow f \text{ est injectif } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\}.$$

Ainsi :

- Si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, alors la matrice A est inversible.
- Si $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$, la matrice A n'est pas inversible.

Proposition 15 (Rang d'une matrice).
On rappelle que le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*, noté* $\mathrm{rg}(A)$*, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. On a alors :*

$$\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A) \qquad\qquad \mathrm{rg}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Proposition 16 (Rang d'une application linéaire).
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *et* $A = Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ *la matrice de* f *relativement aux bases* $\mathscr{B}_E$ *et* $\mathscr{B}_F$*. Alors :*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A).$$

MÉTHODO

Étudier l'inversibilité d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$
- A est inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$
- A est inversible $\Leftrightarrow$ f est bijective (si $A = Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$).
- Une matrice ayant au moins une colonne (ou une ligne) nulle n'est pas inversible.
- Une matrice ayant deux colonnes (ou deux lignes) proportionnelles n'est pas inversible. En particulier, une matrice ayant deux colonnes (ou deux lignes) égales n'est pas inversible.
- Une matrice ayant une colonne (ou une ligne) combinaison linéaire des autres n'est pas inversible.

Théorème 8. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \textit{ est inversible} \Leftrightarrow A \textit{ est la matrice associée à un isomorphisme}$$

III. Récapitulatif de méthodes sur les applications linéaires

MÉTHODO

Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application.

- **Linéarité** : Pour prouver que φ est linéaire, on montre :

$$\forall (u_1, u_2) \in E,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2) = \lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2).$$

- **Noyau** : On a, en général, intérêt à chercher le noyau avant l'image (sauf pour l'ev $\mathbb{R}[X]$). Pour trouver le noyau de l'application φ, on dispose de 2 méthodes
  1. On applique la définition : $u \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(u) = 0_E$.
  2. Si on connaît la dimension de l'image, on utilise le théorème du rang :

  $$\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = \dim(E),$$

  ce qui donne la dimension du noyau. On peut alors parfois deviner une base du noyau.
- **Image** : Pour trouver l'image de l'application φ, on dispose de 2 méthodes.
  1. Si on connaît une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, on utilise la caractérisation de l'image :

  $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\right),$$

  puis on extrait une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ de cette famille génératrice.

2. Si on connaît la dimension du noyau, on utilise le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = \dim(E),$$

ce qui donne la dimension de l'image. Il est alors facile d'extraire une base de la famille génératrice $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$: ce sera une sous-famille libre de cardinal $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi))$.

- **Isomorphisme** : On suppose que les espaces vectoriels E et F ont la même dimension n (cas particulier : $E = F$). Pour montrer que φ est un isomorphisme de E vers F, on dispose de 5 méthodes.

  1. Prouver que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$;

  2. Prouver que $\mathrm{Im}(\varphi) = F$;

  3. Prouver que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n$;

  4. Prouver que l'image de toute base de E est une base de F.

  5. Prouver que l'image d'une base de E est une base de F.

  Les méthodes ***1.*** et ***5.*** sont les plus utilisées.