ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 7

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Variance d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{G}(p)$**
  Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :
  1. X admet une espérance et une variance.
  2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

  Démonstration.
  - L'existence et le calcul de $\mathbb{E}(X)$ ne sont pas obligatoires.
  - Variance :
    × La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\,\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
    × On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1)+k$.
    Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}([X=k]) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} && \textit{(car } k^2 = k(k-1)+k\textit{)} \\
= \quad & p(1-p)\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \\
= \quad & p(1-p)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} && \textit{(car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or la série géométrique dérivée $\sum\limits_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée deuxième $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$, toutes deux de raison $(1-p) \in]-1,1[$ sont convergentes.
Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une variance.

De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= 2\,\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

× D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

- **Variance d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$**
  Soit $\lambda \in]0,+\infty[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors :
  1. X admet une espérance et une variance.
  2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

  Démonstration.
  - L'existence et le calcul de $\mathbb{E}(X)$ ne sont pas obligatoires.
  - Variance :
    × La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\,\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
    × On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1)+k$.
    Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} && \textit{(car } k^2 = k(k-1)+k\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right) && \textit{(car les premiers termes de ces sommes sont nuls)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Or la série exponentielle $\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ est une série convergente.
On en déduit que X admet un moment d'ordre 2, donc une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\,\mathbb{P}([X=k]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda}\right) = \lambda^2 + \lambda$$

× Enfin d'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

□

- **Caractérisation de l'image**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Im}(f) \ = \ \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))\,.$$

Démonstration.
Montrons que $\mathrm{Im}(f) \ = \ \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$ par double inclusion.

- $\mathrm{Im}(f) \ \subset \ \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$:

  Soit $v \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. De plus, $u \in E$, donc il s'écrit comme une combinaison linéaire de la base canonique, *i.e.* il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$$

  Donc :

$$v = f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(e_k).$$

  v est donc une combinaison linéaires des $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, donc $v \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

- $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n)) \ \subset \ \mathrm{Im}(f)$:

  Soit $v \in \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$, donc v s'écrit comme combinaison linéaire des $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Ainsi, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k\right)$$

  donc en posant $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k$, on a bien $f(u) = v$. On en déduit que $v \in \mathrm{Im}(f)$.

□

- **Caractérisation des applications injectives / surjectives**
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

  1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ (*i.e.* $\forall u \in E,\ f(u) = 0_F \Rightarrow u = 0_E$).

  2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Preuve.

1. On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f est injective alors, par définition :

$$(u_1, u_2) \in E^2,\ f(u_1) = f(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$$

Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$.
Alors $f(u) = 0_F = f(0_E)$, *i.e.* $f(u) = f(0_E)$.
Donc, comme f est injective, $u = 0_E$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Soient $(u_1, u_2) \in E^2$ tel que $f(u_1) = f(u_2)$, alors par linéarité de f :

$$f(u_1) = f(u_2) \;\Leftrightarrow\; f(u_1) - f(u_2) = 0_F \;\Leftrightarrow\; f(u_1 - u_2) = 0_F \;\Leftrightarrow\; u_1 - u_2 \in \text{Ker}(f)$$

On en déduit que $u_1 - u_2 = 0_F$ donc $u_1 = u_2$, *i.e.* f est injective.

2. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons f est surjective, alors pour tout $v \in F$, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$.
Donc $v \in \text{Im}(f)$. On en déduit : $\text{Im}(f) = F$.

($\Leftarrow$) Supposons $\text{Im}(f) = F$.
Soit $v \in F$. Alors $v \in \text{Im}(f)$.
Donc, par définition de $\text{Im}(f)$, il existe $u \in E$ tel que : $v = f(u)$.
On en déduit que f est surjective.

□

Connaissances exigibles

- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau, image, caractérisation des injections et surjections, caractérisation de $\text{Im}(f)$.
- Rang, théorème du rang, caractérisation des isomorphismes.
- Application linéaire associée à une matrice.
- Matrice associée à une application linéaire.

⚠ **Aucun résultat de réduction n'est au programme.**