ECG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 5

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Formule des probabilités totales**
  Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ un **système complet d'événements**.
  Alors, pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \ \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Preuve.

- Montrons d'abord que $B = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)$ et que cette union est disjointe.
  - × Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$. Donc

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \right) \\ &= \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i) \quad \textit{(d'après les lois de Morgan)} \end{aligned}$$

  - × Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$.
    Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a en particulier que $A_i \cap A_j = \varnothing$. Donc :

$$\begin{aligned} (B \cap A_i) \ \cap \ (B \cap A_j) &= B \ \cap \ (A_i \cap A_j) \quad \textit{(d'après les lois de Morgan)} \\ &= A \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

    Donc les événements $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles.

- Montrons maintenant la formule des probabilités totales.
  Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i) \right) \quad \textit{(d'après le point précédent)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) \quad \textit{(car les événements } (B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ sont incompatibles)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B) \quad \textit{(si } \forall i \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

$\square$

- **Variance d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{G}(p)$**
Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :
1. X admet une espérance et une variance.
2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Démonstration.

- L'existence et le calcul de $\mathbb{E}(X)$ ne sont pas obligatoires.
- Variance :
  - × La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^2 \, \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
  - × On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1) + k$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}([X = k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} && \textit{(car } k^2 = k(k-1) + k\textit{)} \\
= \ & p(1-p) \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \\
= \ & p(1-p) \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} && \textit{(car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or la série géométrique dérivée $\sum\limits_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée deuxième $\sum\limits_{k \geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$, toutes deux de raison $(1-p) \in]-1,1[$ sont convergentes.
Donc X admet un moment d'ordre 2, donc une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= 2 \, \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

  - × D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

$\square$

- **Variance d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$**
  Soit $\lambda \in \,]0, +\infty[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors :
  1. X admet une espérance et une variance.
  2. De plus : $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

  Démonstration.
  - L'existence et le calcul de $\mathbb{E}(X)$ ne sont pas obligatoires.
  - Variance :
    - × La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k^2\, \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque c'est une série à termes positifs.
    - × On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}$, $k^2 = k(k-1) + k$.
      Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}([X = k]) \\
=\ & \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} && \textit{(car } k^2 = k(k-1) + k\textit{)} \\
=\ & \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} \right) && \textit{(car les premiers termes de ces sommes sont nuls)} \\
=\ & \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \\
=\ & \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
=\ & \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)
\end{aligned}$$

      Or la série exponentielle $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ est une série convergente.
      On en déduit que X admet un moment d'ordre 2, donc une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, \mathbb{P}([X = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\lambda^2\, \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda} \right) = \lambda^2 + \lambda$$

    - × Enfin d'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$\square$

Connaissances exigibles

Probabilités

- définition de tribu, probabilité
- événements incompatibles, système complet d'événements, indépendance
- probabilités conditionnelles, formule de Bayes
- formule du crible, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées
- v.a.r. discrètes finies et infinies, leurs lois (usuelles ou non)
- espérance, théorème de transfert, moments, variance, formule de Koenig-Huygens
- variables aléatoires discrètes finies et infinies, leurs lois
- variables aléatoires discrètes usuelles (finies et infinies), leurs espérances et variances.
- l'indépendance entre v.a.r. n'a pas encore été abordée.

⚠ Les colleurs sanctionneront **très sévèrement** les confusions entre objets mathématiques : probabilité / événement, variable aléatoire / événement, etc.

Algèbre linéaire

- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau, image, caractérisation des injections et surjections, caractérisation de $\mathrm{Im}(f)$.

⚠ **Aucun résultat de réduction n'est au programme.**