ECG4
Mathématiques

# Programme de colle - Semaine 4

---

## Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note $> 8$.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

## Questions de cours

- **Propriétés d'une probabilité** On choisira 3 propriétés à démontrer parmi les suivantes :
  Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors

  1. Pour tous événements $A$ et $B$ tel que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
  2. Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  3. $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  5. $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$
     *(formule du crible)*

  *Démonstration.*

  1. Pour tous événements $A$ et $B$, les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Ainsi
     $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}_{\geqslant 0}.$$
     Donc $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$.
  2. $A$ et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements donc $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$. Donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
  3. On a : $(A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
     Ainsi, par $\sigma$-additivité :
     $$\mathbb{P}((A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$
  4. On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
     On en déduit, à l'aide du point ***2)*** que :
     $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

***5.*** Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\
&\quad = \quad \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\
&\quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&\quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&\quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&\quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&\qquad\quad - (\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ ) \\
&\quad = \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
&\qquad\quad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\
&\qquad\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

- **Probabilité conditionnelle**
  Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $B$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur $\Omega$.

*Démonstration.*
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

***1.*** Soit $B \in \mathscr{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$

***2.*** $\mathbb{P}_A(\Omega) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ 1$

***3.*** Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \ = \ \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors $C_n = A \cap B_n$.
Les événements de la suite $(C_n)$ sont deux à deux incompatibles.
En effet, si $i \neq j$ :

$$C_i \cap C_j \ = \ (A \cap B_i) \ \cap \ (A \cap B_j) \ = \ A \cap (B_i \cap B_j) \ = \ A \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

Par $\sigma$-additivité de $\mathbb{P}$, on a alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right) \ = \ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)$.
Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \ = \ \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

□

- **Formule des probabilités totales**
  Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ un **système complet d'événements**.
  Alors, pour tout événement $B$, on a :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

*Preuve.*

- Montrons d'abord que $B = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)$ et que cette union est disjointe.

  × Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$. Donc

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \\ &= \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i) && \textit{(d'après les lois de Morgan)} \end{aligned}$$

  × Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$.
  Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a en particulier que $A_i \cap A_j = \varnothing$. Donc :

$$\begin{aligned} (B \cap A_i) \;\cap\; (B \cap A_j) &= B \;\cap\; (A_i \cap A_j) && \textit{(d'après les lois de Morgan)} \\ &= A \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

  Donc les événements $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont incompatibles.

- Montrons maintenant la formule des probabilités totales.
  Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)\right) && \textit{(d'après le point précédent)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) && \textit{(car les événements } (B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ sont incompatibles)} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\; \mathbb{P}_{A_i}(B) && \textit{(si } \forall i \in \mathbb{N},\; \mathbb{P}(A_i) \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

$\square$

# Connaissances exigibles

## Probabilités

- définition de tribu, probabilité
- événements incompatibles, système complet d'événements, indépendance
- probabilités conditionnelles, formule de Bayes
- formule du crible, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées
- v.a.r. discrètes finies et infinies, leurs lois (usuelles ou non)
- espérance, théorème de transfert, moments, variance, formule de Koenig-Huygens
- variables aléatoires discrètes finies et infinies, leurs lois
- variables aléatoires discrètes usuelles (finies et infinies), leurs espérances et variances.
- l'indépendance entre v.a.r. n'a pas encore été abordée.

⚠ Les colleurs sanctionneront **très sévèrement** les confusions entre objets mathématiques : probabilité / événement, variable aléatoire / événement, etc.