

Programme de colle - Semaine 3

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

- **Propriétés d'une probabilité** On choisira 3 propriétés à démontrer parmi les suivantes :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors

1. Pour tous événements A et B tel que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
2. Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(formule du crible)

Démonstration.

1. Pour tous événements A et B , les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles. Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$. Ainsi

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}_{\geq 0}.$$

Donc $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

2. A et \bar{A} forment un système complet d'événements donc $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$. Donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. On a : $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
Ainsi, par σ -additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

4. On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point 2) que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

5. Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\
 &= \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
 &\quad - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))) \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\
 &\quad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\
 &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

□

• **Probabilité conditionnelle**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω .

Démonstration.

Il s'agit de vérifier que \mathbb{P}_A vérifie les axiomes d'une probabilité.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geq 0$
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ et donc : $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq 1$

2. $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

3. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \frac{\mathbb{P} \left(A \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n) \right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors $C_n = A \cap B_n$.

Les événements de la suite (C_n) sont deux à deux incompatibles.

En effet, si $i \neq j$:

$$C_i \cap C_j = (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

Par σ -additivité de \mathbb{P} , on a alors : $\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)$.

Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

□

• Stabilité d'un sev engendré

Soit E un \mathbb{R} -ev. Soit $(u_1, \dots, u_m) \in E^m$. On a :

$$u_{m+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_m) \Rightarrow \text{Vect}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$$

Preuve.

Supposons $u_{m+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$.

Démontrons que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$.

× (D) Évident.

× (C) Comme $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1})$, alors le vecteur u s'écrit $u = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot u_i$.

Or $u_{m+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$, donc $u_{m+1} = \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot u_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u &= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot u_i \right) && + && \lambda_{m+1} \cdot u_{m+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot u_i \right) && + && \lambda_{m+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m \mu_i \cdot u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \lambda_{m+1} \times \mu_i) \cdot u_i \end{aligned}$$

et donc $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. □

Connaissances exigibles

Espaces vectoriels

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels
- famille génératrice, famille libre, base
- bases canoniques de \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- dimension d'un espace vectoriel
- rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice



Les élèves ne connaissent pas encore les endomorphismes (et donc le théorème du rang).

Probabilités

- définition de tribu, probabilité
- événements incompatibles, système complet d'événements, indépendance
- probabilités conditionnelles, formule de Bayes
- formule du crible, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées
- v.a.r. discrètes finies et infinies, leurs lois (usuelles ou non)
- espérance, théorème de transfert, moments, variance, formule de Koenig-Huygens
- variables aléatoires discrètes finies et infinies, leurs lois
- variables aléatoires discrètes usuelles (finies et infinies), leurs espérances et variances.
- l'indépendance entre v.a.r. n'a pas encore été abordée.



Les colleurs sanctionneront **très sévèrement** les confusions entre objets mathématiques : probabilité / événement, variable aléatoire / événement, etc.