

Programme de colle - Semaine 20

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

- × si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8 .
- × si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note ≤ 8 .

Questions de cours

• Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. qui admet une espérance.

On suppose de plus que : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ (i.e. X est presque sûrement positive ou nulle). Alors :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}([X \geq a]) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Preuve.

Soit $a > 0$. Considérons la v.a.r. Y définie par :

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geq a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{cases}$$

Listons quelques propriétés de Y :

- $Y(\Omega) = \{0, a\}$ (Y est donc une v.a.r. finie).
- $[Y = a] = [X \geq a]$ (puisque $Y(\omega) = a \Leftrightarrow X(\omega) \geq a$).
- $[Y = 0] = [X < a]$ (puisque $Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow X(\omega) < a$).

1) Comme Y est finie, Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \underbrace{\mathbb{P}([Y = 0])}_{\mathbb{P}([X < a])} + a \times \underbrace{\mathbb{P}([Y = a])}_{\mathbb{P}([X \geq a])} = a \times \mathbb{P}([X \geq a])$$

2) On remarque aussi que : $Y \leq X$. En effet :

- × $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq a \Rightarrow Y(\omega) = a$
- × $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) < a \Rightarrow Y(\omega) = 0$

3) Par croissance de l'espérance, on déduit des deux points précédents que :

$$\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$$
$$\underbrace{\quad}_{\mathbb{P}([X \geq a])} \leq \mathbb{E}(X)$$

On conclut en divisant de part et d'autre par $a > 0$.

□

• **Loi faible des grands nombres**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. **indépendantes**, de **même espérance** m et de **même variance** σ^2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} ([|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon]) = 0$$

On dit que \bar{X}_n *converge en probabilité* vers la variable constante égale à m .

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$.

- La v.a.r. \bar{X}_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev avec $X = \bar{X}_n$. On obtient :

$$\mathbb{P} ([|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m && \text{(car : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{E}(X_i) = m) \\ &= \frac{\cancel{n} m}{\cancel{n}} = m \end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) && \text{(car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 && \text{(car : } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{E}(X_i) = m) \\ &= \frac{\cancel{n} \sigma^2}{\cancel{n}^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$0 \leq \mathbb{P} ([|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon]) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ &\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} ([|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon]) = 0$$

□

• **Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Alors : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration.

On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

• $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k} = 1$

• Notons $u_n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$, donc : $\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$.

D'où : $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\lambda$.

Or la fonction exp est continue en $-\lambda$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-\lambda}$.

• Enfin, comme $1 - \frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, on a :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1} = 1$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])$$

où X est une v.a. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Comme (X_n) est une suite de v.a.r. discrètes et X est une v.a.r. discrète, alors on a bien montré :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$$

□

Connaissances exigibles

Convergence et approximations de v.a.r.

- Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres, Théorème central limite.
- Convergence en loi (convergence des fonctions de répartition), cas particulier des v.a. discrètes.
- Approximations : d'une loi binomiale par une loi de Poisson, d'une loi binomiale par une loi normale, d'une loi de Poisson par une loi normale.
- Correction de continuité.

Chaînes de Markov

- Graphes probabilistes.
- Chaînes de Markov à espace d'états finis, matrice de transition.
- État stable.

Estimation

- Définitions de n -échantillon, estimateur, estimation.
- Intervalle de confiance exact (utilisation de Bienaymé-Tchebychev) **guidé**
- Intervalle de confiance asymptotique (utilisation du théorème central limite) **guidé**