EG4
Mathématiques

Programme de colle - Semaine 2

Notation

On adoptera les principes suivants pour noter les étudiants :

× si l'étudiant sait répondre à la question de cours, il aura une note > 8.

× si l'étudiant ne sait pas répondre à la question de cours ou s'il y a trop d'hésitations, il aura une note $\leqslant 8$.

Questions de cours

- **Critère de convergence des séries télescopiques** :
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Démonstration.
Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} u_j - \sum_{k=0}^{n} u_k && \textit{(avec le changement d'indice } j = k+1\textit{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} u_j + u_{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_0\right) \\ &= u_{n+1} - u_0 \end{aligned}$$

Donc (S_n) converge si et seulement si (u_n) converge.
De plus, si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_0) = \ell - u_0.$$

□

- **Comparaison série / intégrale** :
Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive et décroissante sur cet intervalle.
Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt\right)$ ont même nature.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme f est décroissante, on a :

$$\forall x \in [k, k+1],\ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant bien ordonnées ($k \leqslant k+1$) :

$$f(k+1) \ \leqslant\ \int_k^{k+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(k)$$

On somme l'encadrement précédent pour k variant de 0 à $n-1$. On obtient ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \ \leqslant\ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

et, si on note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$, cela s'écrit :

$$S_n - f(0) \ \leqslant\ \int_0^n f(t)\ dt \ \leqslant\ S_{n-1}$$

En observant que les deux suites (S_n) et $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes (car f est positive), on peut affirmer grâce à la dernière égalité :
× si (S_n) converge vers ℓ, alors $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ, donc converge aussi ;
× si $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', alors (S_n) est majorée par $\ell' + f(0)$, donc converge aussi.

□

Remarque : On pourra demander à l'étudiant s'il est possible d'amoindrir les hypothèses.

- **Propriété des suites croissantes convergentes**.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante} \\ u_n \to \ell \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell}$$

Démonstration.
- On procède par l'absurde. On suppose que :
  × la suite (u_n) croissante,
  × la suite (u_n) converge vers ℓ,
  × et que `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
  Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.
- La suite (u_n) étant croissante, on a donc, par récurrence immédiate (on pourra demander à l'étudiant de la détailler) :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
- En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

Absurde !

□

- **Stabilité d'un sev engendré**
  Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Soit $(u_1, \dots, u_m) \in E^m$. On a :
$$u_{m+1} \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m) \;\Rightarrow\; \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$$
  Preuve.
  Supposons $u_{m+1} \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$.
  Démontrons que $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$.
  × $(\supset)$ Évident.
  × $(\subset)$ Comme $u \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m, u_{m+1})$, alors le vecteur u s'écrit $u = \sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot u_i$.
  Or $u_{m+1} \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$, donc $u_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \cdot u_i$. Ainsi :
$$\begin{aligned} u &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right) + \lambda_{m+1} \cdot u_{m+1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i\right) + \lambda_{m+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_{m+1} \times \mu_i) \cdot u_i \end{aligned}$$
  et donc $u \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_m)$. □

Connaissances exigibles

Suites / Séries

- convergence de suites numériques (théorème de convergence monotone, d'encadrement, etc.)
- suites adjacentes
- étude de suites récurrentes (les élèves doivent être guidés dans le cheminement de ces études)
- équivalents
- négligeabilité
- séries numériques, à termes positifs, séries usuelles, comparaison série / intégrale, comparaisons de séries par négligeabilité et équivalence.
- les séries alternées sont hors programme mais les étudiants ont vu en exercice comment démontrer le critère de convergence des séries alternées.
- toutes les techniques sont à connaître (sommation télescopique, calcul direct des sommes partielles - séries usuelles, comparaison séries / intégrales, critères sur les SATP...)
- on insistera particulièrement en colle sur les rédactions classiques (notamment pour tous les critères sur les SATP).

Espaces vectoriels

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels
- famille génératrice, famille libre, base
- bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$
- dimension d'un espace vectoriel
- rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice

⚠ Les élèves ne connaissent pas encore les endomorphismes (et donc le théorème du rang).